TĐKG 01: VIẾT PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

Dạng 1: Viết phương trình mặt phẳng bằng cách xác định vectơ pháp tuyến

Câu 1. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm A(2;4;1), B(–1;1;3) và mặt phẳng (P): $x-3y+2z-5=0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (P).

• *(Q) đi qua A, B và vuông góc với (P) ⇒ (Q) có VTPT* $\vec{n}=\left[\vec{n}_P,\overrightarrow{AB}\right]=(0;-8;-12)\neq\vec{0}$

$\Rightarrow (Q): 2y+3z-11=0$.

<u>Câu hỏi tương tự</u>:

a) Với A(1; 0; 1), B(2; 1; 2), $(P): x+2y+3z+3=0$. *ĐS:* $(Q): x-2y+z-2=0$

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(2;1;3), B(1;-2;1)$ và song song với đường thẳng $d:\begin{cases}x=-1+t\\ y=2t\\ z=-3-2t\end{cases}$.

• *Ta có* $\overrightarrow{BA}=(1;3;2)$, *d có VTCP* $\vec{u}=(1;2;-2)$.

Gọi $\vec{n}$ *là VTPT của (P)* $\Rightarrow \begin{cases}\vec{n}\perp\overrightarrow{BA}\\ \vec{n}\perp\vec{u}\end{cases}$ $\Rightarrow$ *chọn* $\vec{n}=\left[\overrightarrow{BA},\vec{u}\right]=(-10;4;-1)$

⇒ *Phương trình của (P):* $10x-4y+z-19=0$.

Câu 3. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho 2 đường thẳng (d_1) và (d_2) có phương trình: $(d_1);\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-2}{1}$, (d_2): $\dfrac{x-4}{6}=\dfrac{y-1}{9}=\dfrac{z-3}{3}$. Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa (d_1) và (d_2).

• *Chứng tỏ* $(d_1) // (d_2)$. *(P):* $x + y – 5z +10 = 0$

Câu 4. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho mặt cầu (S) có phương trình: $x^2+y^2+z^2-2x+6y-4z-2=0$. Viết phương trình mặt phẳng (P) song song với giá của véc tơ $\vec{v}=(1;6;2)$, vuông góc với mặt phẳng $(\alpha): x+4y+z-11=0$ và tiếp xúc với (S).

• *(S) có tâm I(1; –3; 2) và bán kính R = 4. VTPT của* (α) *là* $\vec{n}=(1;4;1)$.

⇒ *VTPT của (P) là:* $\vec{n}_P=\left[\vec{n},\vec{v}\right]=(2;-1;2)$ ⇒ *PT của (P) có dạng:* $2x-y+2z+m=0$.

Vì (P) tiếp xúc với (S) nên $d(I,(P))=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=-21\\ m=3\end{array}\right.$.

Vậy: (P): $2x-y+2z+3=0$ *hoặc (P):* $2x-y+2z-21=0$.

Câu 5. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho điểm M(1; –1; 1) và hai đường thẳng $(d_1):\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{-3}$ và $(d_2):\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-4}{5}$. Chứng minh rằng điểm M, d_1, d_2 cùng nằm trên một mặt phẳng. Viết phương trình mặt phẳng đó.

• d_1 *qua* $M_1(0;-1;0)$ *và có* $\vec{u}_1=(1;-2;-3)$, d_2 *qua* $M_2(0;1;4)$ *và có* $\vec{u}_2=(1;2;5)$.

$\left[\vec{u}_1;\vec{u}_2\right]=(-4;-8;4)\neq\vec{0}$, $\overrightarrow{M_1M_2}=(0;2;4)$ ⇒ $\left[\vec{u}_1;\vec{u}_2\right].\overrightarrow{M_1M_2}=0$ ⇒ d_1,d_2 *đồng phẳng.*

Gọi (P) là mặt phẳng chứa d_1,d_2 ⇒ *(P) có VTPT* $\vec{n}=(1;2;-1)$ *và đi qua* M_1 *nên có phương trình* $x+2y-z+2=0$. *Kiểm tra thấy điểm* $M(1;-1;1)\in(P)$.

Dạng 2: Viết phương trình mặt phẳng liên quan đến mặt cầu

Câu 6. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho đường thẳng d: $\frac{x-3}{2}=\frac{y-3}{2}=\frac{z}{1}$ và mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-2x-2y-4z+2=0$. Lập phương trình mặt phẳng (P) song song với *d* và trục *Ox*, đồng thời tiếp xúc với mặt cầu (S).

• *(S) có tâm I(1; 1; 2), bán kính R = 2. d có VTCP* $\vec{u}=(2;2;1)$.

(P) // d, Ox $\Rightarrow$ *(P) có VTPT* $\vec{n}=\left[\vec{u},\vec{i}\right]=(0;1;-2)$ $\Rightarrow$ *PT của (P) có dạng:* $y-2z+D=0$.

(P) tiếp xúc với (S) $\Leftrightarrow d(I,(P))=R \Leftrightarrow \frac{|1-4+D|}{\sqrt{1^2+2^2}}=2 \Leftrightarrow |D-3|=2\sqrt{5} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} D=3+2\sqrt{5} \\ D=3-2\sqrt{5}\end{array}\right.$

$\Rightarrow$ *(P):* $y-2z+3+2\sqrt{5}=0$ *hoặc* *(P):* $y-2z+3-2\sqrt{5}=0$.

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2+2x-4y-4=0$ và mặt phẳng $(P): x+z-3=0$. Viết phương trình mặt phẳng (*Q*) đi qua điểm $M(3;1;-1)$ vuông góc với mặt phẳng (*P*) và tiếp xúc với mặt cầu *(S).*

• *(S) có tâm I(–1; 2; 0) và bán kính R = 3; (P) có VTPT* $\vec{n}_P=(1;0;1)$.

PT (Q) đi qua M có dạng: $A(x-3)+B(y-1)+C(z+1)=0,\ A^2+B^2+C^2\neq 0$

(Q) tiếp xúc với (S) $\Leftrightarrow d(I,(Q))=R \Leftrightarrow |-4A+B+C|=3\sqrt{A^2+B^2+C^2}$ *(*)*

$(Q)\perp(P) \Leftrightarrow \vec{n}_Q.\vec{n}_P=0 \Leftrightarrow A+C=0 \Leftrightarrow C=-A$ *(**)*

Từ (*), (**) $\Rightarrow |B-5A|=3\sqrt{2A^2+B^2} \Leftrightarrow 8B^2-7A^2+10AB=0 \Leftrightarrow A=2B \vee 7A=-4B$

• *Với* $A=2B$. *Chọn B = 1, A = 2, C = –2* $\Rightarrow$ *PT (Q):* $2x+y-2z-9=0$

• *Với* $7A=-4B$. *Chọn B = –7, A = 4, C = –4* $\Rightarrow$ *PT (Q):* $4x-7y-4z-9=0$

Câu hỏi tương tự:

a) Với $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4y-4z+5=0$, $(P): 2x+y-6z+5=0, M(1;1;2)$.

ĐS: $(Q): 2x+2y+z-6=0$ *hoặc* $(Q): 11x-10y+2z-5=0$.

Câu 8. Trong không gian với hệ trục Oxyz, cho mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z-3=0$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa trục Ox và cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có bán kính $r=3$.

• *(S) có tâm I(1; –2; –1), bán kính R = 3. (P) chứa Ox* $\Rightarrow$ *(P): ay + bz = 0.*
Mặt khác đường tròn thiết diện có bán kính bằng 3 cho nên (P) đi qua tâm I.
Suy ra: –2a – b = 0 $\Leftrightarrow$ *b = –2a (a* $\neq$ *0)* $\Rightarrow$ *(P): y – 2z = 0.*

Câu 9. Trong không gian với hệ trục Oxyz, cho mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2+2x-2y+2z-1=0$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x-y-2=0 \\ 2x-z-6=0\end{cases}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa *d* và cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có bán kính $r=1$.

• *(S) có tâm* $I(-1;1;-1)$*, bán kính R = 2.*

PT mặt phẳng (P) có dạng: $ax+by+cz+d=0\ (a^2+b^2+c^2\neq 0)$.

Chọn $M(2;0;-2), N(3;1;0)\in d$.

Ta có: $\begin{cases} M \in (P) \\ N \in (P) \\ d(I,(P)) = \sqrt{R^2 - r^2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} a = b, 2c = -(a+b), d = -3a - b & (1) \\ 17a = -7b, 2c = -(a+b), d = -3a - b & (2) \end{array}\right.$

+ *Với (1)* $\Rightarrow$ *(P):* $x + y - z - 4 = 0$ + *Với (2)* $\Rightarrow$ *(P):* $7x - 17y + 5z - 4 = 0$

Câu 10. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho hai đường thẳng $\Delta_1 : \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{1}$, $\Delta_2 : \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$ và mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y + 4z - 3 = 0$. Viết phương trình tiếp diện của mặt cầu (S), biết tiếp diện đó song song với hai đường thẳng Δ_1 và Δ_1.

• (P): $y + z + 3 + 3\sqrt{2} = 0$ hoặc (P): $y + z + 3 - 3\sqrt{2} = 0$

Câu 11. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz,* cho mặt cầu (*S*) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 11 = 0$ và mặt phẳng (α) có phương trình 2*x* + 2*y* – *z* + 17 = 0. Viết phương trình mặt phẳng (β) song song với (α) và cắt (*S*) theo giao tuyến là đường tròn có chu vi bằng $p = 6\pi$.

• *Do (β) // (α) nên (β) có phương trình 2x + 2y – z + D = 0 (D$\neq$ 17)*
(S) có tâm I(1; –2; 3), bán kính R = 5. Đường tròn có chu vi 6π nên có bán kính r = 3.
Khoảng cách từ I tới (β) là h = $\sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$
Do đó $\frac{|2.1 + 2(-2) - 3 + D|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = 4 \Leftrightarrow |-5 + D| = 12 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} D = -7 \\ D = 17 \text{ (loại)} \end{array}\right.$
Vậy (β) có phương trình $2x + 2y - z - 7 = 0$.
Câu hỏi tương tự:
a) $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z - 11 = 0$, $(a): 2x + y - 2z + 19 = 0$, $p = 8\pi$.
ĐS: $(b): 2x + y - 2z + 1 = 0$

Dạng 3: Viết phương trình mặt phẳng liên quan đến khoảng cách

Câu 12. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, viết phương trình mặt phẳng (P) qua O, vuông góc với mặt phẳng (Q): $x+y+z=0$ và cách điểm M(1; 2; –1) một khoảng bằng $\sqrt{2}$.

• *PT mặt phẳng (P) qua O nên có dạng:* $Ax+By+Cz=0$ *(với* $A^2+B^2+C^2\neq 0$*).*

• *Vì (P)* $\perp$ *(Q) nên:* $1.A+1.B+1.C=0 \Leftrightarrow C=-A-B$ *(1)*

• $d(M,(P))=\sqrt{2} \Leftrightarrow \dfrac{|A+2B-C|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\sqrt{2} \Leftrightarrow (A+2B-C)^2=2(A^2+B^2+C^2)$ *(2)*

Từ (1) và (2) ta được: $8AB+5B^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} B=0 & (3) \\ 8A+5B=0 & (4)\end{array}\right.$

• *Từ (3): B = 0 ⇒ C = –A. Chọn A = 1, C = –1 ⇒ (P):* $x-z=0$

• *Từ (4): 8A + 5B = 0. Chọn A = 5, B = –8 ⇒ C = 3 ⇒ (P):* $5x-8y+3z=0$.

Câu 13. Trong không gian với hệ trục tọa độ O*xyz*, cho đường thẳng $\Delta: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z}{4}$ và điểm M(0; –2; 0). Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm M, song song với đường thẳng Δ, đồng thời khoảng cách *d* giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) bằng 4.

• *Phương trình mp (P) đi qua M(0; –2; 0) có dạng:* $ax+by+cz+2b=0$ *(* $a^2+b^2+c^2\neq 0$*)*

Δ đi qua điểm A(1; 3; 0) và có một VTCP $\vec{u}=(1;1;4)$

Ta có: $\begin{cases}\Delta \,//\, (P) \\ d(A;(P))=d\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+4c=0 \\ \dfrac{|a+5b|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4c \\ a=-2c\end{cases}$.

• *Với* $a=4c$. *Chọn* $a=4, c=1 \Rightarrow b=-8 \Rightarrow$ *Phương trình (P):* $4x-8y+z-16=0$.

• *Với* $a=-2c$. *Chọn* $a=2, c=-1 \Rightarrow b=2 \Rightarrow$ *Phương trình (P):* $2x+2y-z+4=0$.

Câu hỏi tương tự:

a) Với $\Delta: \dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{4}; M(0;3;-2), d=3$.

ĐS: $(P): 2x+2y-z-8=0$ *hoặc* $(P): 4x-8y+z+26=0$.

Câu 14. Trong không gian với hệ toạ độ O*xyz*, cho đường thẳng $(d): \begin{cases} x=t \\ y=-1+2t \\ z=1\end{cases}$ và điểm $A(-1;2;3)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng (*d*) sao cho khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P) bằng 3.

• *(d) đi qua điểm* $M(0;-1;1)$ *và có VTCT* $\vec{u}=(1;2;0)$. *Gọi* $\vec{n}=(a;b;c)$ *với* $a^2+b^2+c^2\neq 0$ *là VTPT của (P) .*

PT mặt phẳng (P): $a(x-0)+b(y+1)+c(z-1)=0 \Leftrightarrow ax+by+cz+b-c=0$ *(1).*

Do (P) chứa (d) nên: $\vec{u}.\vec{n}=0 \Leftrightarrow a+2b=0 \Leftrightarrow a=-2b$ *(2)*

$d\left(A,(P)\right)=3 \Leftrightarrow \dfrac{|-a+3b+2c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=3 \Leftrightarrow \dfrac{|5b+2c|}{\sqrt{5b^2+c^2}}=3 \Leftrightarrow |5b+2c|=3\sqrt{5b^2+c^2}$

$\Leftrightarrow 4b^2-4bc+c^2=0 \Leftrightarrow \left(2b-c\right)^2=0 \Leftrightarrow c=2b$ *(3)*

Từ (2) và (3), chọn $b=-1 \Rightarrow a=2, c=-2 \Rightarrow$ *PT mặt phẳng (P):* $2x-y-2z+1=0$.

Câu 15. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho các điểm $M(-1;1;0), N(0;0;-2), I(1;1;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua A và B, đồng thời khoảng cách từ I đến (P) bằng $\sqrt{3}$.

• *PT mặt phẳng (P) có dạng:* $ax+by+cz+d=0$ $(a^2+b^2+c^2 \neq 0)$.

Ta có: $\begin{cases} M \in (P) \\ N \in (P) \\ d(I,(P)) = \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} a=-b, 2c=a-b, d=a-b & (1) \\ 5a=7b, 2c=a-b, d=a-b & (2) \end{array}\right.$.

+ *Với (1)* $\Rightarrow$ *PT mặt phẳng (P):* $x-y+z+2=0$

+ *Với (2)* $\Rightarrow$ *PT mặt phẳng (P):* $7x+5y+z+2=0$.

Câu 16. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho tứ diện ABCD với $A(1;-1;2)$, $B(1;3;0)$, $C(-3;4;1)$, $D(1;2;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A, B sao cho khoảng cách từ C đến (P) bằng khoảng cách từ D đến (P).

• *PT mặt phẳng (P) có dạng:* $ax+by+cz+d=0$ $(a^2+b^2+c^2 \neq 0)$.

Ta có: $\begin{cases} A \in (P) \\ B \in (P) \\ d(C,(P)) = d(D,(P)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b+2c+d=0 \\ a+3b+d=0 \\ \dfrac{|-3a+4b+c+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \dfrac{|a+2b+c+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=2a, c=4a, d=-7a \\ c=2a, b=a, d=-4a \end{array}\right.$

+ *Với* $b=2a, c=4a, d=-7a$ $\Rightarrow$ *(P):* $x+2y+4z-7=0$.

+ *Với* $c=2a, b=a, d=-4a$ $\Rightarrow$ *(P):* $x+y+2z-4=0$.

<u>*Câu hỏi tương tự:*</u>

a) Với $A(1;2;1), B(-2;1;3), C(2;-1;1), D(0;3;1)$.

ĐS: $(P): 4x+2y+7z-15=0$ *hoặc* $(P): 2x+3z-5=0$.

Câu 17. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;2;3)$, $B(0;-1;2)$, $C(1;1;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và gốc tọa độ O sao cho khoảng cách từ B đến (P) bằng khoảng cách từ C đến (P).

• *Vì* $O \in (P)$ *nên* $(P): ax+by+cz=0$, *với* $a^2+b^2+c^2 \neq 0$.

Do $A \in (P) \Rightarrow a+2b+3c=0$ *(1) và* $d(B,(P)) = d(C,(P)) \Leftrightarrow |-b+2c| = |a+b+c|$ *(2)*

Từ (1) và (2) $\Rightarrow b=0$ *hoặc* $c=0$.

• *Với* $b=0$ *thì* $a=-3c \Rightarrow (P): 3x-z=0$ • *Với* $c=0$ *thì* $a=-2b \Rightarrow (P): 2x-y=0$

<u>*Câu hỏi tương tự:*</u>

a) Với $A(1;2;0), B(0;4;0), C(0;0;3)$. *ĐS:* $-6x+3y+4z=0$ *hoặc* $6x-3y+4z=0$.

Câu 18. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;-1)$, $B(1;1;2)$, $C(-1;2;-2)$ và mặt phẳng (P): $x-2y+2z+1=0$. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua A, vuông góc với mặt phẳng (P), cắt đường thẳng BC tại I sao cho $IB=2IC$.

• *PT* (α) *có dạng:* $ax+by+cz+d=0$, *với* $a^2+b^2+c^2 \neq 0$

Do $A(1;1;-1) \in (\alpha)$ *nên:* $a+b-c+d=0$ *(1);* $(\alpha) \perp (P)$ *nên* $a-2b+2c=0$ *(2)*

$IB=2IC \Rightarrow d(B,(\alpha)) = 2d(C;(\alpha)) \Rightarrow \dfrac{|a+b+2c+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = 2\dfrac{|-a+2b-2c+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3a-3b+6c-d=0 \\ -a+5b-2c+3d=0 \end{array}\right.$ (3)

Từ (1), (2), (3) ta có 2 trường hợp sau :

TH1 : $\begin{cases} a+b-c+d=0 \\ a-2b+2c=0 \\ 3a-3b+6c-d=0 \end{cases} \Leftrightarrow b=\dfrac{-1}{2}a;\ c=-a;\ d=\dfrac{-3}{2}a.$

Chọn $a=2 \Rightarrow b=-1; c=-2; d=-3 \Rightarrow (\alpha):\ 2x-y-2z-3=0$

TH2 : $\begin{cases} a+b-c+d=0 \\ a-2b+2c=0 \\ -a+5b-2c+3d=0 \end{cases} \Leftrightarrow b=\dfrac{3}{2}a; c=a; d=\dfrac{-3}{2}a.$

Chọn $a=2 \Rightarrow b=3; c=2; d=-3 \Rightarrow (\alpha):\ 2x+3y+2z-3=0$

Vậy: $(\alpha):\ 2x-y-2z-3=0$ *hoặc* $(\alpha):\ 2x+3y+2z-3=0$

Câu 19. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt có phương trình $d_1: \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{3}$, $d_2: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-1}{4}$. Viết phương trình mặt phẳng cách đều hai đường thẳng d_1, d_2.

• *Ta có* d_1 *đi qua A(2;2;3) , có* $\vec{u}_{d1}=(2;1;3)$, d_2 *đi qua* $B(1;2;1)$ *và có* $\vec{u}_{d2}=(2;-1;4)$.

Do (P) cách đều d_1, d_2 *nên (P) song song với* d_1, d_2 $\Rightarrow \vec{n}_P=\left[\vec{u}_{d1}, \vec{u}_{d2}\right]=(7;-2;-4)$

$\Rightarrow$ *PT mặt phẳng (P) có dạng:* $7x-2y-4z+d=0$

Do (P) cách đều d_1, d_2 *suy ra* $d(A,(P))=d(B,(P))$

$$\Leftrightarrow \frac{|7.2-2.2-4.3+d|}{\sqrt{69}}=\frac{|7.1-2.2-4.1+d|}{\sqrt{69}} \Leftrightarrow |d-2|=|d-1| \Leftrightarrow d=\frac{3}{2}$$

$\Rightarrow$ *Phương trình mặt phẳng (P):* $14x-4y-8z+3=0$

Câu 20. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt có phương trình $d_1: \begin{cases} x=1+t \\ y=2-t \\ z=1 \end{cases}$, $d_2: \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z+1}{2}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) song song với d_1 và d_2, sao cho khoảng cách từ d_1 đến (P) gấp hai lần khoảng cách từ d_2 đến (P).

• *Ta có :* d_1 *đi qua* $A(1;2;1)$ *và có VTCP* $\vec{u}_1=(1;-1;0)$

d_2 *đi qua* $B(2;1;-1)$ *và có VTCP là* $\vec{u}_2=(1;-2;2)$

Gọi $\vec{n}$ *là VTPT của (P), vì (P) song song với* d_1 *và* d_2 *nên* $\vec{n}=\left[\vec{u}_1, \vec{u}_2\right]=(-2;-2;-1)$

$\Rightarrow$ *Phương trìnht (P):* $2x+2y+z+m=0$.

$d(d_1,(P))=d(A;(P))=\dfrac{|7+m|}{3}$; $d(d_2,(P))=d(B,(P))=\dfrac{|5+m|}{3}$

$d(d_1,(P))=2d(d_2,(P)) \Leftrightarrow |7+m|=2.|5+m| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 7+m=2(5+m) \\ 7+m=-2(5+m) \end{array}\right. \Leftrightarrow m=-3;\ m=-\dfrac{17}{3}$

\+ *Với* $m=-3 \Rightarrow (P): 2x+2y+z-3=0$ + *Với* $m=-\dfrac{17}{3} \Rightarrow (P): 2x+2y+z-\dfrac{17}{3}=0$

Câu 21. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(0;-1;2)$, $B(1;0;3)$ và tiếp xúc với mặt cầu (S): $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=2$.

• *(S) có tâm* $I(1;2;-1)$, *bán kính* $R=\sqrt{2}$.

PT mặt phẳng (P) có dạng: $ax+by+cz+d=0$ $(a^2+b^2+c^2\neq 0)$

Ta có: $\begin{cases} A\in(P) \\ B\in(P) \\ d(I,(P))=R \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} a=-b, c=-a-b, d=2a+3b & (1) \\ 3a=-8b, c=-a-b, d=2a+3b & (2) \end{array}\right.$

\+ *Với (1)* $\Rightarrow$ *Phương trình của (P):* $x-y-1=0$

\+ *Với (2)* $\Rightarrow$ *Phương trình của (P):* $8x-3y-5z+7=0$

Câu 22. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm $A(2;-1;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm A và cách gốc tọa độ O một khoảng lớn nhất.

• *Ta có* $d(O,(P))\le OA$. *Do đó* $d(O,(P))_{\max}=OA$ *xảy ra* $\Leftrightarrow OA\perp(P)$ *nên mặt phẳng (P) cần tìm là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với OA. Ta có* $\overrightarrow{OA}=(2;-1;1)$

Vậy phương trình mặt phẳng (P): $2x-y+z-6=0$..

Câu 23. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm A(10; 2; –1) và đường thẳng d có phương trình: $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{3}$. Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua A, song song với d và khoảng cách từ d tới (P) là lớn nhất.

• *Gọi H là hình chiếu của A trên d* $\Rightarrow$ *d(d, (P)) = d(H, (P)). Giả sử điểm I là hình chiếu của H lên (P), ta có* $AH\ge HI \Rightarrow$ *HI lớn nhất khi* $A\equiv I$. *Vậy (P) cần tìm là mặt phẳng đi qua A và nhận* $\overrightarrow{AH}$ *làm VTPT* $\Rightarrow$ *(P):* $7x+y-5z-77=0$.

Câu 24. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng (*d*) có phương trình tham số $\{x=-2+t;\ y=-2t;\ z=2+2t$. Gọi Δ là đường thẳng qua điểm A(4;0;–1) song song với (*d*) và I(–2;0;2) là hình chiếu vuông góc của A trên (*d*). Viết phương trình của mặt phẳng chứa Δ và có khoảng cách đến (*d*) là lớn nhất.

• *Gọi (P) là mặt phẳng chứa Δ, thì* $(P)\,//\,(d)$ *hoặc* $(P)\supset(d)$. *Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên (P). Ta luôn có* $IH\le IA$ *và* $IH\perp AH$.

Mặt khác $\begin{cases} d(d,(P))=d(I,(P))=IH \\ H\in(P) \end{cases}$

Trong (P), $IH\le IA$; *do đó* $\max IH=IA \Leftrightarrow H\equiv A$. *Lúc này (P) ở vị trí (P₀)* $\perp$ *IA tại A.*

Vectơ pháp tuyến của (P_0) *là* $\vec{n}=\overrightarrow{IA}=\left(6;0;-3\right)$, *cùng phương với* $\vec{v}=\left(2;0;-1\right)$.

Phương trình của mặt phẳng (P_0) *là:* $2(x-4)-1.(z+1)=2x-z-9=0$.

Câu 25. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{2}$ và điểm $A(2;5;3)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa *d* sao cho khoảng cách từ A đến (P) là lớn nhất.

• *PT mặt phẳng (P) có dạng:* $ax+by+cz+d=0$ $(a^2+b^2+c^2\neq 0)$.

(P) có VTPT $\vec{n}=(a;b;c)$, *d đi qua điểm* $M(1;0;2)$ *và có VTCP* $\vec{u}=(2;1;2)$.

Vì (P) $\supset$ *d nên* $\begin{cases} M\in(P) \\ \vec{n}.\vec{u}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+2c+d=0 \\ 2a+b+2c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2c=-(2a+b) \\ d=a+b \end{cases}$. *Xét 2 trường hợp:*

<u>TH1</u>: Nếu b = 0 thì (P): $x - z + 1 = 0$. *Khi đó:* $d(A,(P)) = 0$.

<u>TH2</u>: Nếu b ≠ 0. Chọn $b = 1$ *ta được (P):* $2ax + 2y - (2a+1)z + 2a + 2 = 0$.

Khi đó: $d(A,(P)) = \dfrac{9}{\sqrt{8a^2+4a+5}} = \dfrac{9}{\sqrt{2\left(2a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}}} \le 3\sqrt{2}$

Vậy $\max d(A,(P)) = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow 2a + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{4}$. *Khi đó: (P):* $x - 4y + z - 3 = 0$.

<u>Câu hỏi tương tự</u>:

a) $d: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-2}{5}, A(5;1;6)$. *ĐS:* $(P): 2x + y - z + 1 = 0$

b) $d: \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z}{2}, A(1;4;2)$. *ĐS:* $(P): 5x + 13y - 4z + 21 = 0$

Câu 26. Trong không gian toạ độ Oxyz, cho hai điểm $M(0;-1;2)$ và $N(-1;1;3)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua M, N sao cho khoảng cách từ điểm $K(0;0;2)$ đến mặt phẳng (P) là lớn nhất.

• *PT (P) có dạng:* $Ax + B(y+1) + C(z-2) = 0 \Leftrightarrow Ax + By + Cz + B - 2C = 0$ $(A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$

$N(-1;1;3) \in (P) \Leftrightarrow -A + B + 3C + B - 2C = 0 \Leftrightarrow A = 2B + C$

$\Rightarrow (P): (2B + C)x + By + Cz + B - 2C = 0;$ $\quad d(K,(P)) = \dfrac{|B|}{\sqrt{4B^2+2C^2+4BC}}$

• *Nếu B = 0 thì d(K, (P)) = 0 (loại)*

• *Nếu* $B \neq 0$ *thì* $d(K,(P)) = \dfrac{|B|}{\sqrt{4B^2+2C^2+4BC}} = \dfrac{1}{\sqrt{2\left(\frac{C}{B}+1\right)^2+2}} \le \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Dấu "=" xảy ra khi B = –C. Chọn C = 1. Khi đó PT (P): $x + y - z + 3 = 0$.

Dạng 4: Viết phương trình mặt phẳng liên quan đến góc

Câu 27. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho mặt phẳng (α) chứa đường thẳng (Δ): $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{-2}$ và tạo với mặt phẳng (P) : $2x-2y-z+1=0$ một góc 60^0. Tìm tọa độ giao điểm M của mặt phẳng (α) với trục *Oz*.
• *(Δ) qua điểm* $A(1;0;0)$ *và có VTCP* $\vec{u}=(1;-1;-2)$. *(P) có VTPT* $\vec{n}'=(2;-2;-1)$. *Giao điểm* $M(0;0;m)$ *cho* $\overrightarrow{AM}=(-1;0;m)$. *(α) có VTPT* $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AM},\vec{u}\right]=(m;m-2;1)$ *(α) và (P):* $2x-2y-z+1=0$ *tạo thành góc* 60^0 *nên :* $\left\|\cos\left(\vec{n},\vec{n}'\right)\right\|=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{2m^2-4m+5}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2m^2-4m+1=0\Leftrightarrow m=2-\sqrt{2}$ *hay* $m=2+\sqrt{2}$ *Kết luận :* $M(0;0;2-\sqrt{2})$ *hay* $M(0;0;2+\sqrt{2})$
Câu 28. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, viết phương trình mặt phẳng *(P)* đi qua giao tuyến *d* của hai mặt phẳng $(\alpha):2x-y-1=0$, $(\beta):2x-z=0$ và tạo với mặt phẳng $(Q):x-2y+2z-1=0$ một góc φ mà $\cos\varphi=\frac{2\sqrt{2}}{9}$
• *Lấy* $A(0;1;0)$, $B(1;3;2)\in d$. *(P) qua A* $\Rightarrow$ *PT (P) có dạng:* $Ax+By+Cz-B=0$. *(P) qua B nên:* $A+3B+2C-B=0\Rightarrow A=-(2B+2C)$ $\Rightarrow (P):-(2B+2C)x+By+Cz-B=0$ $\cos\varphi=\frac{\|-2B-2C-2B+2C\|}{3\sqrt{(2B+2C)^2+B^2+C^2}}=\frac{2\sqrt{2}}{9}\Leftrightarrow 13B^2+8BC-5C^2=0$. *Chọn* $C=1\Rightarrow B=1;\ B=\frac{5}{13}$. + *Với* $B=C=1\Rightarrow(P):-4x+y+z-1=0$ + *Với* $B=\frac{5}{13},\ C=1\Rightarrow(P):-23x+5y+13z-5=0$.
Câu 29. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(-1;2;-3),B(2;-1;-6)$ và mặt phẳng $(P):x+2y+z-3=0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa AB và tạo với mặt phẳng (P) một góc α thoả mãn $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{6}$.
• *PT mặt phẳng (Q) có dạng:* $ax+by+cz+d=0\ (a^2+b^2+c^2\neq 0)$. *Ta có:* $\begin{cases}A\in(Q)\\B\in(Q)\\\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{6}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-a+2b-3c+d=0\\2a-b-6c+d=0\\\frac{\|a+2b+c\|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{1+4+1}}=\frac{\sqrt{3}}{6}\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=-4b,c=-3b,d=-15b\\a=-b,c=0,d=-b\end{array}\right.$ $\Rightarrow$ *Phương trình mp(Q):* $4x-y+3z+15=0$ *hoặc (Q):* $x-y-3=0$. *<u>Câu hỏi tương tự</u>:* *a)* $A(0;0;1),B(1;1;0)$, $(P)\equiv(Oxy),\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{6}}$. *ĐS: (Q):* $2x-y+z-1=0$ *hoặc (Q):* $x-2y-z+1=0$.

Câu 30. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $d:\begin{cases}x+y+z-3=0\\2x+y+z-4=0\end{cases}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d và tạo với mặt phẳng (Oxy) một góc $\alpha=60^0$.

• *ĐS:* $(P):\sqrt{2}x+y+z-\sqrt{2}-2=0$ *hoặc* $(P):\sqrt{2}x-y-z-\sqrt{2}+2=0$

Câu 31. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai mặt phẳng $(P):5x-2y+5z-1=0$ và $(Q):x-4y-8z+12=0$. Lập phương trình mặt phẳng (R) đi qua điểm M trùng với gốc tọa độ O, vuông góc với mặt phẳng (P) và tạo với mặt phẳng (Q) một góc $a=45^0$.

• *Giả sử PT mặt phẳng (R):* $ax+by+cz+d=0\ (a^2+b^2+c^2\neq 0)$.

Ta có: $(R)\perp(P)\Leftrightarrow 5a-2b+5c=0$ *(1);*

$\cos((R),(Q))=\cos 45^0 \Leftrightarrow \dfrac{|a-4b-8c|}{9\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ *(2)*

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 7a^2+6ac-c^2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=-c\\c=7a\end{array}\right.$

• *Với* $a=-c$*: chọn* $a=1,b=0,c=-1$ $\Rightarrow$ *PT mặt phẳng* $(R):x-z=0$

• *Với* $c=7a$*: chọn* $a=1,b=20,c=7$ $\Rightarrow$ *PT mặt phẳng* $(R):x+20y+7z=0$

Câu hỏi tương tự:

a) Với $(P):x-y-2z=0,(Q)\equiv(Oyz),M(2;-3;1),a=45^0$.

ĐS: $(R):x+y+1=0$ *hoặc* $(R):5x-3y+4z-23=0$

Câu 32. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng có phương trình: $\Delta_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-1}{3}$ và $\Delta_2:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z}{1}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa Δ_1 và tạo với Δ_2 một góc $a=30^0$.

• *Đáp số: (P):* $5x+11y+2z+4=0$ *hoặc (P):* $2x-y-z-2=0$.

Câu hỏi tương tự:

a) Với $\Delta_1:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z}{1}$, $\Delta_2:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+5}{-1}$, $a=30^0$.

ĐS: (P): $x-2y-2z+2=0$ *hoặc (P):* $x+2y+z-4=0$

b) $\Delta_1:\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{1}$, $\Delta_2:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+1}{1}$, $a=30^0$.

ĐS: (P): $(18+\sqrt{114})x+21y+(15+2\sqrt{114})z-(3-\sqrt{114})=0$

hoặc (P): $(18-\sqrt{114})x+21y+(15-2\sqrt{114})z-(3+\sqrt{114})=0$

Câu 33. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1;2;3)$ và tạo với các trục Ox, Oy các góc tương ứng là 45^0, 30^0.

• *Gọi* $\vec{n}=(a;b;c)$ *là VTPT của (P). Các VTCP của trục Ox, Oy là* $\vec{i}=(1;0;0),\vec{j}=(0;1;0)$.

Ta có: $\begin{cases}\sin(Ox,(P))=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\\sin(Oy,(P))=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|a|=\sqrt{2}|b|\\|c|=|b|\end{cases}$

PT mặt phẳng (P): $\sqrt{2}(x-1)+(y-2)\pm(z-3)=0$ *hoặc* $-\sqrt{2}(x-1)+(y-2)\pm(z-3)=0$

Câu 34. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng (Q): $x+2y-z+5=0$ và đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-3}{1}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d và tạo với mặt phẳng (Q) một góc nhỏ nhất.

• *PT mặt phẳng (P) có dạng:* $ax+by+cz+d=0\ (a^2+b^2+c^2\neq 0)$. *Gọi* $a=((P),(Q))$.

Chọn hai điểm $M(-1;-1;3),N(1;0;4)\in d$. *Ta có:* $\begin{cases}M\in(P)\\N\in(P)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c=-a-b\\d=7a+4b\end{cases}$

$\Rightarrow$ *(P):* $ax+by+(-2a-b)z+7a+4b=0 \Rightarrow \cos\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{6}}.\dfrac{|a+b|}{\sqrt{5a^2+4ab+2b^2}}$

TH1: Nếu a = 0 thì $\cos\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{6}}.\dfrac{|b|}{\sqrt{2b^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow a=30^0$.

TH2: Nếu $a\neq 0$ *thì* $\cos\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{6}}.\dfrac{\left|1+\dfrac{b}{a}\right|}{\sqrt{5+4\dfrac{b}{a}+2\left(\dfrac{b}{a}\right)^2}}$. *Đặt* $x=\dfrac{b}{a}$ *và* $f(x)=\cos^2\alpha$

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{9}{6}.\dfrac{x^2+2x+1}{5+4x+2x^2}$.

Dựa vào BBT, ta thấy $\min f(x)=0\Leftrightarrow\cos\alpha=0\Leftrightarrow a=90^0>30^0$

Do đó chỉ có trường hợp 1 thoả mãn, tức a = 0. Khi đó chọn $b=1,c=1,d=4$.

Vậy: (P): $y-z+4=0$.

Câu hỏi tương tự:

a) *Với (Q):* $x+2y+2z-3=0$, $d:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z}{-1}$. *ĐS:* $(P):x+2y+5z+3=0$.

b) *Với* $(Q)\equiv(Oxy), d:\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z}{2}$. *ĐS:* $(P):x-y+z-3=0$.

c) *Với* $(Q):2x-y-z-2=0$, $d:\begin{cases}x=-t\\y=-1+2t\\z=2+t\end{cases}$. *ĐS:* $(P):x+y+z-3=0$.

Câu 35. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm $M(-1;-1;3),N(1;0;4)$ và mặt phẳng (Q): $x+2y-z+5=0$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua M, N và tạo với (Q) một góc nhỏ nhất.

• *ĐS:* $(P):y-z+4=0$.

Câu hỏi tương tự:

a) $M(1;2;-1),N(-1;1;2),(Q)\equiv(Oxy)$. *ĐS:* $(P):6x+3y+5z-7=0$.

Câu 36. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=1-t\\y=-2+t\\z=2t\end{cases}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d và tạo với trục Oy một góc lớn nhất.

• *PT mặt phẳng (P) có dạng:* $ax+by+cz+d=0\ (a^2+b^2+c^2\neq 0)$. *Gọi* $a=((P),Oy)$.

Chọn hai điểm $M(1;-2;0), N(0;-1;2) \in d$. *Ta có:* $\begin{cases} M \in (P) \\ N \in (P) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2c = a-b \\ d = -a+2b \end{cases}$

$\Rightarrow$ *(P):* $ax + by + \dfrac{a-b}{2}z - a + 2b = 0 \Rightarrow \sin\alpha = \dfrac{2|b|}{\sqrt{5a^2+5b^2-2ab}}$.

TH1: Nếu b = 0 thì $a = 0^0$.

TH2: Nếu $b \neq 0$ *thì* $\sin\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 + 5 - 2\dfrac{a}{b}}}$. *Đặt* $x = \dfrac{a}{b}$ *và* $f(x) = \sin^2 a$.

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{4}{5x^2 - 2x + 5}$. *Dựa vào BBT, ta được* $\max f(x) = \dfrac{5}{6} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{5} \Rightarrow a > 0^0$.

Vậy α *lớn nhất khi* $\dfrac{a}{b} = \dfrac{1}{5}$. *Chọn* $a = 1, b = 5, c = -2, d = 9 \Rightarrow$ *(P):* $x + 5y - 2z + 9 = 0$.

Câu 37. Trong không gian với hệ tọa độ O*xyz*, cho hai đường thẳng $d_1: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z}{-1}$ và $d_2: \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z}{2}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa d_1 sao cho góc giữa mặt phẳng (P) và đường thẳng d_2 là lớn nhất.

• d_1 *đi qua* $M(1;-2;0)$ *và có VTCP* $\vec{u} = (1;2;-1)$. *Vì* $d_1 \subset (P)$ *nên* $M \in (P)$.

PT mặt phẳng (P) có dạng: $A(x-1) + B(y+2) + Cz = 0 \quad (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$

Ta có: $d \subset (P) \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{n} = 0 \Leftrightarrow C = A + 2B$.

Gọi $a = ((P), d_2) \Rightarrow \sin a = \dfrac{|4A+3B|}{3.\sqrt{2A^2+4AB+5B^2}} = \dfrac{1}{3}.\sqrt{\dfrac{(4A+3B)^2}{2A^2+4AB+5B^2}}$

TH1: Với B = 0 thì $\sin a = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

TH2: Với $B \neq 0$. *Đặt* $t = \dfrac{A}{B}$, *ta được:* $\sin a = \dfrac{1}{3}.\sqrt{\dfrac{(4t+3)^2}{2t^2+4t+5}}$

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{(4t+3)^2}{2t^2+4t+5}$. *Dựa vào BBT ta có:* $\max f(t) = \dfrac{25}{7}$ *khi* $t = -7 \Leftrightarrow \dfrac{A}{B} = -7$

Khi đó $\sin a = f(-7) = \dfrac{5\sqrt{3}}{9}$.

So sánh TH1 và TH2 $\Rightarrow \alpha$ *lớn nhất với* $\sin a = \dfrac{5\sqrt{3}}{9}$ *khi* $\dfrac{A}{B} = -7$.

$\Rightarrow$ *Phương trình mặt phẳng (P) :* $7x - y + 5z - 9 = 0$.

Câu 38. Trong không gian với hệ tọa độ O*xyz*, cho đường thẳng $d: \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+1}{-1}$ và điểm $A(2;-1;0)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua A, song song với *d* và tạo với mặt phẳng (O*xy*) một góc nhỏ nhất.

• *ĐS:* $(P): x + y + 2z - 1 = 0$.

Câu 39. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng (Q): $2x-y+z+2=0$ và điểm $A(1;1;-1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm A, vuông góc với mặt phẳng (Q) và tạo với trục Oy một góc lớn nhất.

• *ĐS:* $(P): y+z=0$ *hoặc* $(P): 2x+5y+z-6=0$.

Dạng 5: Viết phương trình mặt phẳng liên quan đến tam giác

Câu 40. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho điểm A(4; 5; 6). Viết phương trình mặt phẳng (P) qua A, cắt các trục tọa độ lần lượt tại I, J, K mà A là trực tâm của tam giác IJK.

• Gọi I(a;0;0), J(0;b;0), K(0;0;c) $\Rightarrow (P): \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

$$\begin{matrix}\overrightarrow{IA}=(4-a;5;6), & \overrightarrow{JA}=(4;5-b;6)\\ \overrightarrow{JK}=(0;-b;c), & \overrightarrow{IK}=(-a;0;c)\end{matrix} \Rightarrow \begin{cases}\frac{4}{a}+\frac{5}{b}+\frac{6}{c}=1\\ -5b+6c=0\\ -4a+6c=0\end{cases} \Rightarrow a=\frac{77}{4};\ b=\frac{77}{5};\ c=\frac{77}{6}$$

Vậy phương trình mặt phẳng (P): $4x+5y+6z-77=0$.

Câu hỏi tương tự:

a) Với A(–1; 1; 1). *ĐS: (P):* $x-y-z+3=0$

Câu 41. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho A(2; 0; 0) M(1; 1; 1). Mặt phẳng (P) thay đổi qua AM cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại B(0; *b*; 0), C(0; 0; *c*) (*b* > 0, *c* > 0). Chứng minh rằng: $b+c=\frac{bc}{2}$. Từ đó, tìm *b, c* để diện tích tam giác ABC nhỏ nhất.

• *PT mp (P) có dạng:* $\frac{x}{2}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$. *Vì* $M\in(P)$ *nên* $\frac{1}{2}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1 \Leftrightarrow b+c=\frac{bc}{2}$.

Ta có $\overrightarrow{AB}(-2;b;0)$, $\overrightarrow{AC}(-2;0;c)$. *Khi đó* $S=\sqrt{b^2+c^2+(b+c)^2}$.

Vì $b^2+c^2\ge 2bc;\ (b+c)^2\ge 4bc$ *nên* $S\ge\sqrt{6bc}$.

Mà $bc=2(b+c)\ge 4\sqrt{bc}\Rightarrow bc\ge 16$. *Do đó* $S\ge\sqrt{96}$. *Dấu "=" xảy ra* $\Leftrightarrow b=c=4$.

Vậy: $\min S=\sqrt{96}$ *khi* $b=c=4$.

Câu 42. Trong không gian toạ độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;2;4)$ và mặt phẳng $(P): x+y+z+4=0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) song song với (P) và (Q) cắt hai tia Ox, Oy tại 2 điểm B, C sao cho tam giác ABC có diện tích bằng 6.

• *Vì (Q) // (P) nên (Q):* $x+y+z+d=0\ (d\ne 4)$. *Giả sử* $B=(Q)\cap Ox,\ C=(Q)\cap Oy$

$\Rightarrow B(-d;0;0), C(0;-d;0)\ (d<0)$. $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|=6 \Leftrightarrow d=-2$

$\Rightarrow (Q): x+y+z-2=0$.

Câu 43. Trong không gian toạ độ $Oxyz$, cho các điểm $A(3;0;0), B(1;2;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua A, B và cắt trục Oz tại M sao cho tam giác ABC có diện tích bằng $\frac{9}{2}$.

• *ĐS:* $(P): x+2y-2z-3=0$.

Dạng 6: Các dạng khác về viết phương trình mặt phẳng

Câu 44. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(9;1;1)$, cắt các tia Ox, Oy, Oz tại A, B, C sao cho thể tích tứ diện OABC có giá trị nhỏ nhất.

• *Giả sử* $A(a;0;0)\in Ox, B(0;b;0)\in Oy, C(0;0;c)\in Oz \quad (a,b,c>0)$.

Khi đó PT mặt phẳng (P) có dạng: $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.

Ta có: $M(9;1;1)\in(P) \Rightarrow \dfrac{9}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1$ *(1);* $\quad V_{OABC}=\dfrac{1}{6}abc$ *(2)*

(1) $\Leftrightarrow abc=9bc+ac+ab \geq 3\sqrt[3]{9(abc)^2} \Leftrightarrow (abc)^3 \geq 27.9(abc)^2 \Leftrightarrow abc \geq 243$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} 9bc=ac=ab \\ \dfrac{9}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=27 \\ b=3 \\ c=3 \end{cases} \Rightarrow$ *(P):* $\dfrac{x}{27}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{3}=1$.

<u>Câu hỏi tương tự</u>:

a) Với $M(1;2;4)$. *ĐS:* $(P): \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{6}+\dfrac{z}{12}=1$

Câu 45. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1;2;3)$, cắt các tia Ox, Oy, Oz tại A, B, C sao cho biểu thức $\dfrac{1}{OA^2}+\dfrac{1}{OB^2}+\dfrac{1}{OC^2}$ có giá trị nhỏ nhất.

• *ĐS:* $(P): x+2y+3z-14=0$.

Câu 46. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(2;5;3)$, cắt các tia Ox, Oy, Oz tại A, B, C sao cho biểu thức $OA+OB+OC$ có giá trị nhỏ nhất.

• *ĐS:* $(P): \dfrac{x}{2+\sqrt{6}+\sqrt{10}}+\dfrac{y}{5+\sqrt{10}+\sqrt{15}}+\dfrac{z}{3+\sqrt{6}+\sqrt{15}}=1$.

TĐKG 02: VIẾT PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

Dạng 1: Viết phương trình đường thẳng bằng cách xác định vectơ chỉ phương

Câu 47. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho đường thẳng $d:\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{3}$ và mặt phẳng $P:\ x-y-z-1=0$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua $A(1;1;-2)$, song song với mặt phẳng (P) và vuông góc với đường thẳng d.

• $\vec{u}=\left[\overrightarrow{u_d};\overrightarrow{n_P}\right]=(2;5;-3)$. *Δ nhận* $\vec{u}$ *làm VTCP* $\Rightarrow \Delta:\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{5}=\frac{z+2}{-3}$

Câu 48. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho đường thẳng (d) có phương trình: $\{x=-t;y=-1+2t;\ z=2+t\ (t\in R)$ và mặt phẳng (P): $2x-y-2z-3=0$.Viết phương trình tham số của đường thẳng Δ nằm trên (P), cắt và vuông góc với (d).

• *Gọi* $A=d\cap(P)\Rightarrow A(1;-3;1)$.

Phương trình mp(Q) qua A và vuông góc với d: $-x+2y+z+6=0$

Δ là giao tuyến của (P) và (Q) $\Rightarrow \Delta$: $\{x=1+t;y=-3;z=1+t$

Câu 49. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz,* cho điểm M(2; 1; 0) và đường thẳng Δ: $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{-1}$. Lập phương trình của đường thẳng *d* đi qua điểm M, cắt và vuông góc với Δ.

• $\vec{u}_\Delta=(2;1;-1)$. *Gọi* $H=d\cap\Delta$. *Giả sử* $H(1+2t;-1+t;-t)\Rightarrow \overrightarrow{MH}=(2t-1;t-2;-t)$.

$\overrightarrow{MH}\perp\vec{u}_\Delta \Leftrightarrow 2(2t-1)+(t-2)-(-t)=0 \Leftrightarrow t=\frac{2}{3}\Rightarrow \vec{u}_d=3\overrightarrow{MH}=(1;-4;-2)$

$\Rightarrow d:\ \begin{cases}x=2+t\\y=1-4t\\z=2t\end{cases}$.

Câu 50. Trong không gian với hệ trục toạ độ Oxyz, cho mặt phẳng (P): x + 2y – 2z + 1 = 0 và hai điểm A(1;7; –1), B(4;2;0). Lập phương trình đường thẳng (D) là hình chiếu vuông góc của đường thẳng AB trên (P).

• *Gọi (Q) là mặt phẳng qua A, B và vuông góc với (P)* $\Rightarrow$ *(Q): 8x + 7x + 11z – 46 = 0.*
(D) = (P)$\cap$*(Q) suy ra phương trình (D).*

Câu 51. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, viết phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng $d:\begin{cases}x-2z=0\\3x-2y+z-3=0\end{cases}$ trên mặt phẳng $P:x-2y+z+5=0$.

• *PTTS của d:* $\begin{cases}x=4t\\y=-\frac{3}{2}+7t\\z=2t\end{cases}$. *Mặt phẳng (P) có VTPT* $\vec{n}=(1;-2;1)$.

Gọi $A=d\cap(P)\Rightarrow A\left(4;\frac{11}{2};2\right)$. *Ta có* $B\left(0;-\frac{3}{2};0\right)\in d, B\left(0;-\frac{3}{2};0\right)\notin(P)$.

Gọi $H(x;y;z)$ *là hình chiếu vuông góc của B trên (P). Ta tìm được* $H\left(-\frac{4}{3};\frac{7}{6};-\frac{4}{3}\right)$.

Gọi Δ là hình chiếu vuông góc của d trên (P) ⇒ Δ đi qua A và H

⇒ Δ có VTCP $\vec{u} = 3\overrightarrow{HA} = (16;13;10)$ *⇒ Phương trình của Δ:* $\begin{cases} x = 4 + 16t \\ y = \dfrac{11}{2} + 13t \\ z = 2 + 10t \end{cases}$.

<u>Câu hỏi tương tự</u>:

a) Với $d: \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-2}{3}$, $(P): x - 3y + 2z - 5 = 0$. *ĐS:* $\Delta: \begin{cases} x = 1 + 23m \\ y = 2 + 29m \\ z = 5 + 32m \end{cases}$

Câu 52. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, gọi *A, B, C* lần lượt giao điểm của mặt phẳng (P): $6x + 2y + 3z - 6 = 0$ với *Ox, Oy, Oz*. Lập phương trình đường thẳng *d* đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC* đồng thời vuông góc với mặt phẳng (*P*).

• *Ta có:* $(P) \cap Ox = A(1;0;0)$; $(P) \cap Oy = B(0;3;0)$; $(P) \cap Oz = C(0;0;2)$

Gọi Δ là đường thẳng vuông góc (OAB) tại trung điểm M của AB; (α) là mặt phẳng trung trực cạnh OC; I tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện OABC. Ta có: $I = \Delta \cap (\alpha) \Rightarrow I\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2};1\right)$.

Gọi J tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC thì IJ ⊥ (ABC), nên d chính là đường thẳng IJ.

⇒ Phương trình đường thẳng d: $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2} + 6t \\ y = \dfrac{3}{2} + 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$.

Câu 53. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho 3 điểm $A(1;2;-1), B(2;1;1); C(0;1;2)$ và đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z+2}{2}$. Lập phương trình đường thẳng *Δ* đi qua trực tâm của tam giác ABC, nằm trong mặt phẳng (ABC) và vuông góc với đường thẳng *d*.

• *Ta có* $\overrightarrow{AB} = (1;-1;2), \overrightarrow{AC} = (-1;-1;3) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (-1;-5;-2)$

⇒ phương trình mặt phẳng (ABC): $x + 5y + 2z - 9 = 0$

Gọi trực tâm của tam giác ABC là $H(a;b;c)$*, khi đó ta có hệ:*

$$\begin{cases} \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = 0 \\ \overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB} = 0 \\ H \in (ABC) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b + 2c = 3 \\ a + b - 3c = 0 \\ a + 5b + 2c = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow H(2;1;1)$$

Do đường thẳng Δ nằm trong (ABC) và vuông góc với (d) nên:

$$\begin{cases} \vec{u}_\Delta \perp \vec{n}_{ABC} \\ \vec{u}_\Delta \perp \vec{u}_d \end{cases} \Rightarrow \vec{u}_\Delta = \left[\vec{n}_{ABC}, \vec{u}_d\right] = (12;2;-11).$$

Vậy phương trình đường thẳng $\Delta: \dfrac{x-2}{12} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-1}{-11}$

Dạng 2: Viết phương trình đường thẳng liên quan đến một đường thẳng khác

Câu 54. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm M(2; 1; 0) và đường thẳng *d* có phương trình $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$. Viết phương trình của đường thẳng Δ đi qua điểm M, cắt và vuông góc với đường thẳng *d* và tìm toạ độ điểm M′ đối xứng với M qua *d*.

• *PTTS của d:* $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = -1+t \\ z = -t \end{cases}$. *d có VTCP* $\vec{u} = (2;1;-1)$.

Gọi H là hình chiếu của M trên d $\Rightarrow H(1+2t;-1+t;-t) \Rightarrow \overrightarrow{MH} = (2t-1;-2+t;-t)$

Ta có $MH \perp d \Leftrightarrow \overrightarrow{MH}.\vec{u} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{3} \Rightarrow H\left(\frac{7}{3};-\frac{1}{3};-\frac{2}{3}\right)$, $\overrightarrow{MH} = \left(\frac{1}{3};-\frac{4}{3};-\frac{2}{3}\right)$

Phương trình đường thẳng Δ: $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z}{-2}$.

Gọi M′ là điểm đối xứng của M qua d $\Rightarrow$ *H là trung điểm của MM′* $\Rightarrow M'\left(\frac{8}{3};-\frac{5}{3};-\frac{4}{3}\right)$.

Câu hỏi tương tự:

a) $M(-4;-2;4); d: \frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{4}$. *ĐS:* $\Delta: \frac{x+1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{-1}$

Câu 55. Trong không gian *Oxyz*, cho đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-1}$ và hai điểm $A(1;1;-2)$, $B(-1;0;2)$. Viết phương trình đường thẳng Δ qua A, vuông góc với *d* sao cho khoảng cách từ *B* tới Δ là nhỏ nhất.

• *d có VTCP* $\vec{u}_d = (1;2;-1)$. *Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với d. Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên (P) khi đó đường thẳng Δ đi qua A và H thỏa YCBT.*
Ta có: (P): $x+2y-z-5=0$. *Giả sử* $H(x;y;z)$.

Ta có: $\begin{cases} H \in (P) \\ \overrightarrow{BH}, \vec{u}_d \text{ cùng phương} \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{1}{3};\frac{8}{3};\frac{2}{3}\right)$

$\Rightarrow \vec{u}_\Delta = 3\overrightarrow{AH} = (-2;5;8) \Rightarrow$ *Phương trình Δ:* $\frac{x-1}{-2} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+2}{8}$.

Câu 56. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-1}$ và hai điểm $A(1;2;-1)$, $B(3;-1;-5)$. Viết phương trình đường thẳng *d* đi qua điểm A và cắt đường thẳng Δ sao cho khoảng cách từ B đến đường thẳng *d* là lớn nhất.

• *Giả sử d cắt Δ tại M* $\Rightarrow M(-1+2t;3t;-1-t)$, $\overrightarrow{AM} = (-2+2t;3t-2;-t)$, $\overrightarrow{AB} = (2;-3;-4)$

Gọi H là hình chiếu của B trên d. Khi đó $d(B,d) = BH \le BA$. *Vậy* $d(B,d)$ *lớn nhất bằng BA*

$\Leftrightarrow H \equiv A \Leftrightarrow AM \perp AB \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow 2(-2+2t)-3(3t-2)+4t=0 \Leftrightarrow t=2$

$\Rightarrow M(3;6;-3) \Rightarrow$ *PT đường thẳng* $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-1}$.

Câu 57. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho hai điểm A(1; 5; 0), B(3; 3; 6) và đường thẳng Δ: $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{2}$. Viết phương trình đường thẳng *d* đi qua điểm B và cắt đường thẳng Δ tại điểm C sao cho diện tích tam giác ABC có giá trị nhỏ nhất.

• *Phương trình tham số của Δ:* $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=1-t \\ z=2t \end{cases}$. *Điểm C* $\in \Delta$ *nên* $C(-1+2t;1-t;2t)$.

$\overrightarrow{AC}=(-2+2t;-4-t;2t);\overrightarrow{AB}=(2;-2;6)$; $\left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right]=(-24-2t;12-8t;12-2t)$

$\Rightarrow \left\|\left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right]\right\|=2\sqrt{18t^2-36t+216}$ $\Rightarrow S=\dfrac{1}{2}\left\|\left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right]\right\|$ $=\sqrt{18(t-1)^2+198}\ \geq \sqrt{198}$

Vậy Min S = $\sqrt{198}$ *khi* $t=1$ *hay C(1; 0; 2)* $\Rightarrow$ *Phương trình BC:* $\dfrac{x-3}{-2}=\dfrac{y-3}{-3}=\dfrac{z-6}{-4}$.

Câu 58. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-2}{2}$ và mặt phẳng (*P*): *x* + 3*y* + 2z + 2 = 0. Lập phương trình đường thẳng Δ song song với mặt phẳng (*P*), đi qua *M*(2; 2; 4) và cắt đường thẳng (*d*).

• *Đường thẳng (d) có PTTS:* $\begin{cases} x=-1+3t \\ y=2-2t \\ z=2+2t \end{cases}$. *Mặt phẳng (P) có VTPT* $\vec{n}=(1;\ 3;\ 2)$

Giả sử N(–1 + 3t ; 2 –2t ; 2 + 2t) $\in d \Rightarrow \overrightarrow{MN}=(3t-3;-2t;2t-2)$

Để MN // (P) thì $\overrightarrow{MN}.\vec{n}=0 \Leftrightarrow t=7 \Rightarrow$ *N(20; –12; 16)*

Phương trình đường thẳng Δ: $\dfrac{x-2}{9}=\dfrac{y-2}{-7}=\dfrac{z-4}{6}$

<u>Câu hỏi tương tự:</u>

a) $d:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{1}$, $(P):x+3y+2z+2=0$, $M(2;2;4)$. *ĐS:* $\Delta:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z-3}{1}$

b) $d:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+2}{2}$, $(P):2x+y-z+1=0$, $M(1;2;-1)$. *ĐS:* $\Delta:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-9}=\dfrac{z+1}{-5}$

c) $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+4}{-2}=\dfrac{z-1}{2}$, $(P):3x-2y-3z-2=0$, $M(3;-2;-4)$. *ĐS:* $\Delta:\dfrac{x-3}{5}=\dfrac{y+2}{-6}=\dfrac{z+4}{9}$

Câu 59. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz,* cho mặt phẳng $(\alpha):3x-2y+z-29=0$ và hai điểm $A(4;4;6)$, $B(2;9;3)$. Gọi E,F là hình chiếu của A và B trên (α). Tính độ dài đoạn EF. Tìm phương trình đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (α) đồng thời Δ đi qua giao điểm của AB với (α) và Δ vuông góc với AB.

• $\overrightarrow{AB}=(-2;5;-3)$, $\vec{n}_a=(3;-2;1)$, $\sin(AB,(\alpha))=\left|\cos(\overrightarrow{AB},\vec{n}_a)\right|=\dfrac{19}{\sqrt{532}}$

$EF=AB.\cos(AB,(\alpha))=AB\sqrt{1-\sin^2(AB,(\alpha))}=\sqrt{38}\sqrt{1-\dfrac{361}{532}}=\sqrt{\dfrac{171}{14}}$

AB cắt (α) *tại* $K(6;-1;9)$; $\vec{u}_\Delta=\left[\overrightarrow{AB},\vec{n}_\alpha\right]=(1;7;11)$. *Vậy* $\Delta:\begin{cases} x=6+t \\ y=-1+7t \\ z=9+11t \end{cases}$

Câu 60. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho 2 mặt phẳng (P), (Q) và đường thẳng (d) lần lượt có phương trình: $(P): x-2y+z=0,\ (Q): x-3y+3z+1=0,\ (d): \frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{1}$. Lập phương trình đường thẳng Δ nằm trong (*P*) song song với mặt phẳng (*Q*) và cắt đường thẳng (*d*).

• *(P), (Q) lần lượt có VTPT là* $\vec{n}_P=(1;-2;1), \vec{n}_Q=(1;-3;3) \Rightarrow \left[\vec{n}_P, \vec{n}_Q\right]=(-3;-2;-1)$

PTTS của (d): $x=1+2t, y=t, z=1+t$. *Gọi A = (d) ∩ (Δ) ⇒* $A(1+2t;t;1+t)$.

. *Do A ⊂ (P) nên:* $1+2t-2t+1+t=0 \Leftrightarrow t=-2 \Rightarrow A(-3;-2;-1)$

Theo giả thiết ta có: $\begin{cases}\vec{u}_\Delta \perp \vec{n}_P \\ \vec{u}_\Delta \perp \vec{n}_Q\end{cases} \Rightarrow \vec{u}_\Delta=\left[\vec{n}_P, \vec{n}_Q\right]=(-3;-2;-1)$

Vậy phương trình đường thẳng $(\Delta): \frac{x+3}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+1}{1}$.

Câu 61. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho 3 điểm $A(1;2;-1), B(2;1;1), C(0;1;2)$ và đường thẳng $(d): \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z+2}{2}$. Lập phương trình đường thẳng Δ đi qua trực tâm của tam giác ABC, nằm trong mặt phẳng (ABC) và vuông góc với đường thẳng (*d*).

• *Ta có* $\overrightarrow{AB}=(1;-1;2), \overrightarrow{AC}=(-1;-1;3) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]=(-1;-5;-2)$

⇒ *phương trình (ABC):* $x+5y+2z-9=0$

Gọi trực tâm của ΔABC là $H(a;b;c)$ $\begin{cases}\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=0 \\ \overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB}=0 \\ H\in(ABC)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a-b+2c=3 \\ a+b-3c=0 \\ a+5b+2c=9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=2 \\ b=1 \\ c=1\end{cases} \Rightarrow H(2;1;1)$

Do (Δ) ⊂ (ABC) và vuông góc với (d) nên: $\begin{cases}\vec{u}_\Delta \perp \vec{n}_{ABC} \\ \vec{u}_\Delta \perp \vec{u}_d\end{cases} \Rightarrow \vec{u}_\Delta=\left[\vec{n}_{ABC}, \vec{n}_d\right]=(12;2;-11)$

⇒ *PT đường thẳng* $\Delta: \frac{x-2}{12}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{-11}$.

Câu 62. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho mặt phẳng (P): $x+2y-z+5=0$, đường thẳng $d: \frac{x+3}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-3}{1}$ và điểm $A(-2;3;4)$. Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trên (P), đi qua giao điểm của *d* và (P), đồng thời vuông góc với *d*. Tìm điểm M trên Δ sao cho khoảng cách AM ngắn nhất.

• *Gọi B = d ∩ (P) ⇒* $B(-1;0;4)$. *Vì* $\begin{cases}\Delta\subset(P) \\ \Delta\perp d\end{cases}$ *nên* $\begin{cases}\vec{u}_\Delta \perp \vec{n}_P \\ \vec{u}_\Delta \perp \vec{u}_d\end{cases}$.

Do đó ta có thể chọn $\vec{u}_\Delta=\frac{1}{3}\left[\vec{n}_P, \vec{u}_d\right]=(1;-1;-1)$ ⇒ *PT của Δ:* $\begin{cases}x=-1+t \\ y=-t \\ z=4-t\end{cases}$.

Giả sử $M(-1+t;-t;4-t)\in\Delta \Rightarrow AM=\sqrt{3t^2+8t+10}=\sqrt{3\left(t+\frac{4}{3}\right)^2+\frac{14}{3}} \ge \sqrt{\frac{14}{3}}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow t=-\frac{4}{3} \Leftrightarrow M\left(-\frac{7}{3};\frac{4}{3};\frac{16}{3}\right)$. *Vậy AM đạt GTNN khi* $M\left(-\frac{7}{3};\frac{4}{3};\frac{16}{3}\right)$.

Câu hỏi tương tự:

a) $(P): 2x+y-2z+9=0$, $d: \begin{cases} x=1-t \\ y=-3+2t \\ z=3+t \end{cases}$. *ĐS:* $\Delta: \begin{cases} x=t \\ y=-1 \\ z=4+t \end{cases}$

Câu 63. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho điểm $A(3;-1;1)$, đường thẳng $\Delta: \frac{x}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{2}$, mặt phẳng $(P): x-y+z-5=0$. Viết phương trình của đường thẳng d đi qua điểm A , nằm trong (P) và hợp với đường thẳng Δ một góc 45^0.

• *Gọi* $\vec{u}_d, \vec{u}_\Delta$ *lần lươt là các VTCP của* d *và* Δ*;* $\vec{n}_P$ *là VTPT của (P).*

Đặt $\vec{u}_d=(a;b;c),\ (a^2+b^2+c^2\neq 0)$. *Vì d nằm trong (P) nên ta có :* $\vec{n}_P \perp \vec{u}_d$

$\Rightarrow a-b+c=0 \Leftrightarrow b=a+c$ *(1).*

Theo gt: $(d,\Delta)=45^0 \Leftrightarrow \frac{|a+2b+2c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}.3}=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 2(a+2b+c)^2=9(a^2+b^2+c^2)$ *(2)*

Thay (1) vào (2) ta có : $14c^2+30ac=0 \Leftrightarrow c=0; c=-\frac{15a}{7}$

+ Với $c=0$*: chọn* $a=b=1 \Rightarrow$ *PTTS của d là :* $\begin{cases} x=3+t \\ y=-1-t \\ z=1 \end{cases}$

+ Với $c=-\frac{15a}{7}$*: chọn* $a=7, c=-15, b=-8 \Rightarrow$*.PTTS của d là:* $\begin{cases} x=3+7t \\ y=-1-8t \\ z=1-15t \end{cases}$.

Câu 64. Trong không gian toạ độ O*xyz*, cho đường thẳng *d*: $\frac{x-3}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z+1}{-1}$ và mặt phẳng (P): $x+y+z+2=0$. Gọi M là giao điểm của *d* và (P). Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P), vuông góc với *d* đồng thời khoảng cách từ M tới Δ bằng $\sqrt{42}$.

• *PTTS d:* $\begin{cases} x=3+2t \\ y=-2+t \\ z=-1-t \end{cases} \Rightarrow M(1;-3;0)$. *(P) có VTPT* $\vec{n}_P=(1;1;1)$*, d có VTCP* $\vec{u}_d=(2;1;-1)$

Vì Δ *nằm trong (P) và vuông góc với d nên VTCP* $\vec{u}_\Delta=\left[\vec{u}_d,\vec{n}_P\right]=(2;-3;1)$

Gọi N(x; y; z) là hình chiếu vuông góc của M trên Δ*, khi đó* $\overrightarrow{MN}=(x-1;y+3;z)$.

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{MN}\perp\vec{u}_\Delta \\ N\in(P) \\ MN=\sqrt{42} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z+2=0 \\ 2x-3y+z-11=0 \\ (x-1)^2+(y+3)^2+z^2=42 \end{cases}$ $\Rightarrow$ *N(5; –2; –5) hoặc N(–3; – 4; 5)*

• *Với N(5; –2; –5)* $\Rightarrow$ *Phương trình của* $\Delta: \frac{x-5}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z+5}{1}$

• *Với N(–3; – 4; 5)* $\Rightarrow$ *Phương trình của* $\Delta: \frac{x+3}{2}=\frac{y+4}{-3}=\frac{z-5}{1}$.

Câu 65. Trong không gian với hệ tọa độ O*xyz*, cho mặt phẳng (α): $x+y-z-1=0$, hai đường thẳng (Δ): $\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{1}$, ($\Delta'$): $\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{3}$. Viết phương trình đường thẳng (d) nằm trong mặt phẳng (α) và cắt (Δ′); (d) và (Δ) chéo nhau mà khoảng cách giữa chúng bằng $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

• *(α) có VTPT* $\vec{n} = (1;1;-1)$, *(Δ) có VTCP* $\vec{u}_\Delta = (-1;-1;1)$ $\Rightarrow (\Delta) \perp (\alpha)$.

Gọi $A = (\Delta') \cap (\alpha) \Rightarrow A(0;0;-1)$; $B = (\Delta) \cap (\alpha) \Rightarrow B(1;0;0) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (1;0;1)$

Vì (d) $\subset$ (α) và (d) cắt (Δ') nên (d) đi qua A và (Δ) $\perp$ (α) nên mọi đường thẳng nằm trong (α) và không đi qua B đều chéo với (Δ).

Gọi $\vec{u}_d = (a;b;c)$ *là VTCP của (d)* $\Rightarrow \vec{u}_d.\vec{n} = a + b - c = 0$ *(1)*

và $\vec{u}_d$ *không cùng phương với* $\overrightarrow{AB}$ *(2)*

Ta có: $d(d,\Delta) = d(B,d) \Rightarrow \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\vec{u}_d\right]\right|}{\left|\vec{u}_d\right|} = \dfrac{\sqrt{6}}{2} \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{2b^2+(a-c)^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ *(3)*

Từ (1) và (3) $\Rightarrow ac = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ c = 0 \end{array}\right.$.

• *Với* $a = 0$. *Chọn* $b = c = 1 \Rightarrow \vec{u}_d = (0;1;1) \Rightarrow d: \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = -1 + t \end{cases}$

• *Với* $c = 0$. *Chọn* $a = -b = 1 \Rightarrow \vec{u}_d = (1;-1;0) \Rightarrow d: \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = -1 \end{cases}$.

Dạng 3: Viết phương trình đường thẳng liên quan đến hai đường thẳng khác

Câu 66. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, viết phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng: $\Delta_1: \frac{x-7}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-9}{-1}$ và $\Delta_2: \begin{cases} x = 3+7t \\ y = 1-2t \\ z = 1-3t \end{cases}$.

• *Phương trình tham số của* $\Delta_1: \begin{cases} x = 7+t' \\ y = 3+2t' \\ z = 9-t' \end{cases}$

Gọi M và N lần lượt là giao điểm của đường vuông góc chung với Δ_1 *và* Δ_2

$\Rightarrow M(7 + t';3 + 2t';9 - t')$ *và* $N(3 -7t;1 + 2t;1 + 3t)$

VTCP lần lượt của Δ_1 *và* Δ_2 *là* $\vec{a} = (1; 2; -1)$ *và* $\vec{b} = (-7;2;3)$

Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{MN} \perp \vec{a} \\ \overrightarrow{MN} \perp \vec{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MN}.\vec{a} = 0 \\ \overrightarrow{MN}.\vec{b} = 0 \end{cases}$. *Từ đây tìm được t và t'* $\Rightarrow$ *Toạ độ của M, N.*

Đường vuông góc chung Δ *chính là đường thẳng MN.*

Câu hỏi tương tự:

a) *Với* $(\Delta_1): \begin{cases} x = 3+t \\ y = -1+2t \\ z = 4 \end{cases}$, $(\Delta_2): \begin{cases} x = -2+2t' \\ y = 2t' \\ z = 2+4t' \end{cases}$. *ĐS:* $\Delta: \begin{cases} 2x-y+10z-47=0 \\ x+3y-2z+6=0 \end{cases}$

Câu 67. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm $M(-4;-5;3)$ và cắt cả hai đường thẳng: $d_1: \begin{cases} 2x+3y+11=0 \\ y-2z+7=0 \end{cases}$ và $d_2: \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-5}$.

• *Viết lại phương trình các đường thẳng:* $d_1: \begin{cases} x = 5-3t_1 \\ y = -7+2t_1 \\ z = t_1 \end{cases}$, $d_2: \begin{cases} x = 2+2t_2 \\ y = -1+3t_2 \\ z = 1-5t_2 \end{cases}$.

Gọi $A = d \cap d_1, B = d \cap d_2 \Rightarrow A(5-3t_1;-7+2t_1;t_1)$, $B(2+2t_2;-1+3t_2;1-5t_2)$.

$\overrightarrow{MA} = (-3t_1+9;2t_1-2;t_1-3)$, $\overrightarrow{MB} = (2t_2+6;3t_2+4;-5t_2-2)$

$\left[\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right] = (-13t_1t_2-8t_1+13t_2+16;-13t_1t_2+39t_2;-13t_1t_2-24t_1+31t_2+48)$

M, A, B thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}$ *cùng phương* $\Leftrightarrow \left[\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right] = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 2 \\ t_2 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow A(-1;-3;2), B(2;-1;1) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (3;2;-1)$

Đường thẳng d qua M(–4; –5; 3) và có VTCP $\overrightarrow{AB} = (3;2;-1) \Rightarrow d: \begin{cases} x = -4+3t \\ y = -5+2t \\ z = 3-t \end{cases}$

Câu hỏi tương tự:

a) *M(1;5;0),* $d_1: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z}{-3}$, $d_2: \begin{cases} x = t \\ y = 4-t \\ z = -1+2t \end{cases}$. *ĐS:*

b) *M(3; 10; 1)*, $d_1: \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+3}{2}$, $d_2: \frac{x-3}{1} = \frac{y-7}{-2} = \frac{z-1}{-1}$ *ĐS:* $d: \begin{cases} x = 3+2t \\ y = 10-10t \\ z = 1-2t \end{cases}$

Câu 68. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 và mặt phẳng (α) có phương trình là $\Delta_1: \begin{cases} x = 2+t \\ y = 5+3t \\ z = t \end{cases}$, $\Delta_2: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z+2}{2}$, $(\alpha): x - y + z + 2 = 0$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua giao điểm của Δ_1 với (α) đồng thời cắt Δ_2 và vuông góc với trục Oy.

• *Toạ độ giao điểm A của (α) và Δ_1 thoả mãn hệ* $\begin{cases} x = 2+t \\ y = 5+3t \\ z = t \\ x - y + z + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ x = 1 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow A(1;2;-1)$

Trục Oy có VTCP là $\vec{j} = (0;1;0)$. *Gọi d là đường thẳng qua A cắt* Δ_2 *tại* $B(1+t;-1+t;-2+2t)$. $\overrightarrow{AB} = (t;t-3;2t-1); d \perp Oy \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\vec{j} = 0 \Leftrightarrow t = 3 \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (3;0;5)$

Đường thẳng d đi qua A nhận $\overrightarrow{AB} = (3;0;5)$ *làm VTCP có phương trình là* $\begin{cases} x = 1+3u \\ y = 2 \\ z = -1+5u \end{cases}$.

Câu 69. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+2t \\ z = 1+2t \end{cases}$, đường thẳng d_2 là giao tuyến của hai mặt phẳng (P): $2x - y - 1 = 0$ và (Q): $2x + y + 2z - 5 = 0$. Gọi I là giao điểm của d_1, d_2. Viết phương trình đường thẳng d_3 qua điểm A(2; 3; 1), đồng thời cắt hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt tại B và C sao cho tam giác BIC cân đỉnh I.

• *PTTS của* $d_2: \{x = t';\ y = -1+2t';\ z = 3-2t'$. $I = d_1 \cap d_2 \ \Rightarrow I(1;1;1)$.

Giả sử: $B(1+t;1+2t;1+2t) \in d_1, C(t';-1+2t';3-2t') \in d_2\ (t \neq 0,\ t' \neq 1)$

ΔBIC *cân đỉnh I* $\Leftrightarrow \begin{cases} IB = IC \\ [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = \vec{0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t' = 2 \end{cases} \Rightarrow$ *Phương trình* $d_3: \{x = 2; y = 3; z = 1+2t$

Câu 70. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho mặt phẳng (P): $4x - 3y + 11z = 0$ và hai đường thẳng d₁: $\dfrac{x}{-1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z+1}{3}$, $\dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-3}{2}$. Chứng minh rằng d_1 và d_2 chéo nhau. Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trên (P), đồng thời Δ cắt cả d_1 và d_2.

• *Toạ độ giao điểm của d_1 và (P): A(–2;7;5). Toạ độ giao điểm của d_2 và (P): B(3;–1;1)*

Phương trình đường thẳng Δ: $\dfrac{x+2}{5} = \dfrac{y-7}{-8} = \dfrac{z-5}{-4}$.

Câu 71. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho hai mặt phẳng và hai đường thẳng có phương trình (P): $3x + 12y - 3z - 5 = 0$ và (Q): $3x - 4y + 9z + 7 = 0$, (d_1): $\dfrac{x+5}{2} = \dfrac{y-3}{-4} = \dfrac{z+1}{3}$, ($d_2$): $\dfrac{x-3}{-2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-2}{4}$. Viết phương trình đường thẳng (Δ) song song với hai mặt phẳng (P), (Q) và cắt (d_1), (d_2).

• *(P) có VTPT* $\vec{n}_P = (1;\ 4;\ -1)$, *(Q) có pháp vectơ* $\vec{n}_Q = (3;\ -4;\ 9)$

(d₁) có VTCP $\vec{u}_1 = (2;\,-4;\,3)$, *(d₂) có VTCP* $\vec{u}_2 = (-2;\,3;\,4)$

Gọi: $\begin{cases} (\Delta_1) = (P) \cap (Q) \\ (P_1) \supset (d_1), (P_1) \,//\, (P) \\ (Q_1) \supset (d_2), (Q_1) \,//\, (Q) \\ \vec{u} = \vec{u}_{\Delta_1} \end{cases}$ $\Rightarrow$ *(Δ) = (P₁) ∩ (Q₁) và (Δ) // (Δ₁)*

(Δ) có vectơ chỉ phương $\vec{u} = \frac{1}{4}[\vec{n}_P;\,\vec{n}_Q] = (8;\,-3;\,-4)$

(P₁) có cặp VTCP $\vec{u}_1$ *và* $\vec{u}$ *nên có VTPT:* $\vec{n}_{P1} = [\vec{u}_1;\,\vec{u}] = (25;\,32;\,26)$

Phương trình mp (P₁): 25(x + 5) + 32(y – 3) + 26(z + 1) = 0 $\Leftrightarrow 25x + 32y + 26z + 55 = 0$

(Q₁) có cặp VTCP $\vec{u}_2$ *và* $\vec{u}$ *nên có VTPT:* $\vec{n}_{Q1} = [\vec{u}_2;\,\vec{u}] = (0;\,24;\,-18)$

Phương trình mp (Q₁): $0(x-3) + 24(y+1) - 18(z-2) = 0 \;\Leftrightarrow\; 4y - 3x + 10 = 0$

Ta có: $(\Delta) = (P_1) \cap (Q_1) \Rightarrow$ *phương trình đường thẳng (Δ) :* $\begin{cases} 25x + 32y + 26z + 55 = 0 \\ 4y - 3z + 10 = 0 \end{cases}$

Câu 72. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng (P): $2x - y + 2z - 3 = 0$ và hai đường thẳng *(d₁), (d₂)* lần lượt có phương trình $\frac{x-4}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$ và $\frac{x+3}{2} = \frac{y+5}{3} = \frac{z-7}{-2}$. Viết phương trình đường thẳng (Δ) song song với mặt phẳng (P), cắt (d_1) và (d_2) tại A và B sao cho AB = 3.

• $A \in (d_1) \;\Rightarrow\; A(4+2t;1+2t;-t)$; $B \in (d_2) \Rightarrow B(-3+2t';-5+3t';7-2t')$

$\overrightarrow{AB} = (-7+2t'-2t;-6+3t'-2t;7-2t'+t)$, $\vec{n}_P = (2;-1;2)$.

Từ giả thiết ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{AB}.\vec{n}_P = 0 \\ AB = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = 2 \\ t = -1 \end{cases} \Rightarrow A(2;-1;1), \overrightarrow{AB} = (-1;2;2)$.

$\Rightarrow$ *Phương trình đường thẳng (Δ):* $\frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{2}$.

Câu 73. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng (P): $2x - y + z + 1 = 0$ và hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{3}$, $d_2: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-2}{2}$. Viết phương trình đường thẳng Δ song song với (P), vuông góc với d_1 và cắt d_2 tại điểm E có hoành độ bằng 3.

• d_1 *có VTCP* $\vec{u}_1 = (2;1;3)$, d_2 *có VTCP* $\vec{u}_2 = (2;3;2)$, *(P) có VTPT* $\vec{n} = (2;-1;1)$.

Giả sử Δ có VTCP $\vec{u} = (a;b;c)$, $E \in d_2$ *có* $x_E = 3 \Rightarrow E(3;-1;6)$.

Ta có: $\begin{cases} \Delta \,//\, (P) \\ \Delta \perp d_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}.\vec{n} = 0 \\ \vec{u}.\vec{u}_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - b + c = 0 \\ 2a + b + 3c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -c \\ b = -c \end{cases} \Rightarrow$ *Chọn* $\vec{u} = (1;1;-1)$

$\Rightarrow$ *PT đường thẳng Δ:* $\{x = 3 + t;\; y = -1 + t;\; z = 6 - t$.

Câu 74. Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng $(d_1),(d_2)$ và mặt phẳng (P) có phương trình: $(d_1): \frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{1}$, $(d_2): \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1}$; $(P): x + y - 2z + 5 = 0$. Lập phương trình đường thẳng (*d*) song song với mặt phẳng (*P*) và cắt $(d_1),(d_2)$ lần lượt tại A, B sao cho độ dài đoạn AB nhỏ nhất.

• *Đặt* $A(-1+a;-2+2a;a)$, $B(2+2b;1+b;1+b) \Rightarrow \overrightarrow{AB}=(-a+2b+3;-2a+b+3;-a+b+1)$

Do AB // (P) nên: $\overrightarrow{AB} \perp \vec{n}_P=(1;1;-2) \Leftrightarrow b=a-4$. *Suy ra:* $\overrightarrow{AB}=(a-5;-a-1;-3)$

$$AB=\sqrt{(a-5)^2+(-a-1)^2+(-3)^2}=\sqrt{2a^2-8a+35}=\sqrt{2(a-2)^2+27}\ge 3\sqrt{3}$$

Suy ra: $\min AB=3\sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-2 \end{cases}$, $A(1;2;2)$, $\overrightarrow{AB}=(-3;-3;-3)$.

Vậy $d: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-2}{1}$.

Câu 75. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho hai đường thẳng $(d_1): \dfrac{x+8}{2}=\dfrac{y-6}{1}=\dfrac{z-10}{-1}$ và $(d_2): \begin{cases} x=t \\ y=2-t \\ z=-4+2t \end{cases}$. Viết phương trình đường thẳng *(d)* song song với trục *Ox* và cắt *(d₁)* tại A, cắt *(d₂)* tại B. Tính AB.

• *Giả sử:* $A(-8+2t_1;6+t_1;10-t_1) \in d_1$, $B(t_2;2-t_2;-4+2t_2) \in d_2$.

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}=(t_2-2t_1+8;-t_2-t_1-4);2t_2+t_1-14)$.

$\overrightarrow{AB}, \vec{i}=(1;0;0)$ *cùng phương* $\Leftrightarrow \begin{cases} -t_2-t_1-4=0 \\ 2t_2+t_1-14=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1=-22 \\ t_2=18 \end{cases}$

$\Rightarrow A(-52;-16;32)$, $B(18;-16;32)$.

$\Rightarrow$ *Phương trình đường thẳng d:* $\{x=-52+t;\ y=-16;\ z=32$.

Câu 76. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho hai đường thẳng: (d_1): $\begin{cases} x=-23+8t \\ y=-10+4t \\ z=t \end{cases}$ và (d_2): $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z}{1}$. Viết phương trình đường thẳng (*d*) song song với trục *Oz* và cắt cả hai đường thẳng (d_1), (d_2).

• *Giả sử* $A(-23+8t_1;-10+4t_1;t_1) \in d_1$, $B(3+2t_2;-2-2t_2;t_2) \in d_2$.

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}=(2t_2-8t_1+26;-2t_2-4t_1+8;t_2-t_1)$

AB // Oz $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \vec{k}$ *cùng phương* $\Leftrightarrow \begin{cases} 2t_2-8t_1+26=0 \\ -2t_2-4t_1+8=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1=\dfrac{17}{6} \\ t_2=-\dfrac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow A\left(-\dfrac{1}{3};\dfrac{4}{3};\dfrac{17}{6}\right)$

$\Rightarrow$ *Phương trình đường thẳng AB:* $\left\{x=-\dfrac{1}{3};\ y=\dfrac{4}{3};\ z=\dfrac{17}{6}+t\right.$

Câu 77. Trong không gian với hệ toạ độ O*xyz*, cho các điểm A(2,0,0); B(0,4,0); C(2,4,6) và đường thẳng (d): $\begin{cases} 6x-3y+2z=0 \\ 6x+3y+2z-24=0 \end{cases}$. Viết phương trình đường thẳng Δ // (d) và cắt các đường thẳng AB, OC.

• *Phương trình mặt phẳng (α) chứa AB và song song d: (α): 6x + 3y + 2z – 12 = 0*
Phương trình mặt phẳng (β) chứa OC và song song d: (β): 3x – 3y + z = 0

Δ là giao tuyến của (α) và (β) ⇒ Δ: $\begin{cases} 6x+3y+2z-12=0 \\ 3x-3y+z=0 \end{cases}$

Câu 78. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho bốn điểm A(4;5;6); B(0;0;1); C(0;2;0); D(3;0;0). Chứng minh các đường thẳng AB và CD chéo nhau. Viết phương trình đường thẳng (D) vuông góc với mặt phẳng Oxy và cắt các đường thẳng AB, CD.

• *Gọi (P) là mặt phẳng qua AB và (P) ⊥ (Oxy) ⇒ (P): 5x – 4y = 0*

(Q) là mặt phẳng qua CD và (Q) ⊥ (Oxy) ⇒ (Q): 2x + 3y – 6 = 0

Ta có (D) = (P)∩(Q) ⇒ Phương trình của (D)

Câu 79. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho hai đường thẳng có phương trình: $d_1:\begin{cases} x=-1-2t \\ y=t \\ z=1+t \end{cases}$ và $d_2:\ \dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{2}$. Xét vị trí tương đối của d_1 và d_2. Viết phương trình đường thẳng *d* qua M trùng với gốc toạ độ O, cắt d_1 và vuông góc với d_2.

• *Đường thẳng Δ cần tìm cắt d_1 tại A(–1–2t; t; 1+t) ⇒* $\overrightarrow{OA}$ *= (–1–2t; t; 1+t)*

$d\perp d_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{OA}.\vec{u}_2=0 \Leftrightarrow t=-1 \Rightarrow A(1;-1;0)$ ⇒ *PTTS của* $d:\{x=t;\ y=-t;\ z=0$

<u>Câu hỏi tương tự</u>:

a) Với $M(1;1;1)$, $(d_1):\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-2}$, $(d_2):\begin{cases} x=-2+2t \\ y=-5t \\ z=2+t \end{cases}$. *ĐS:* $d:\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$

Câu 80. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho 2 đường thẳng có phương trình:

$$(d_1):\begin{cases} x=t \\ y=4+t \\ z=6+2t \end{cases} \quad \text{và} \quad (d_2):\begin{cases} x=t' \\ y=3t'-6 \\ z=t'-1 \end{cases}$$

Gọi K là hình chiếu vuông góc của điểm I(1; –1; 1) trên (d_2). Tìm phương trình tham số của đường thẳng đi qua K vuông góc với (d_1) và cắt (d_1).

• *(d_1) có VTCP* $\vec{u}_1=(1;\,1;\,2)$; *(d_2) có VTCP* $\vec{u}_2=(1;\,3;\,1)$

$K\in(d_2)\Rightarrow K(t';\,3t'-6;\,t'-1)\Rightarrow \overrightarrow{IK}=(t'-1;\,3t'-5;\,t'-2)$

$\overrightarrow{IK}\perp\vec{u}_2 \Leftrightarrow t'-1+9t'-15+t'-2=0 \Leftrightarrow t'=\dfrac{18}{11} \Rightarrow K\left(\dfrac{18}{11};-\dfrac{12}{11};\dfrac{7}{11}\right)$

Giả sử (d) cắt (d_1) tại $H(t;\,4+t;\,6+2t),\ (H\in(d_1))$. $\overrightarrow{HK}=\left(\dfrac{18}{11}-t;-\dfrac{56}{11}-t;-\dfrac{59}{11}-2t\right)$

$\overrightarrow{HK}\perp\vec{u}_1 \Leftrightarrow \dfrac{18}{11}-t-\dfrac{56}{11}-t-\dfrac{118}{11}-4t=0 \Leftrightarrow t=-\dfrac{26}{11} \Rightarrow \overrightarrow{HK}=\dfrac{1}{11}(44;\,-30;\,-7).$

Vậy, PTTS của đường thẳng (d): $\left\{x=\dfrac{18}{11}+44\lambda;\ y=-\dfrac{12}{11}-30\lambda;\ z=\dfrac{7}{11}-7\lambda\right.$

Câu 81. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho điểm M(0;1;1) và 2 đường thẳng (d_1), (d_2) với: (d_1): $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z}{1}$; (d_2) là giao tuyến của 2 mặt phẳng (P): $x+1=0$ và (Q): $x+y-z+2=0$. Viết phương trình đường thẳng (d) qua M vuông góc (d_1) và cắt (d_2).

• *Phương trình mặt phẳng (α) đi qua M(0;1;1) vuông góc với (d_1):* $3x+2y+z-3=0$.

A = (d₂) ∩ (α) $\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2y+z-3=0 \\ x+1=0 \\ x+y-z+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow A\left(-1;\frac{5}{3};\frac{8}{3}\right)$

$\Rightarrow$ *Phương trình AM:* $\frac{x}{-3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{5}$.

Câu 82. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho mặt phẳng $(P): 2x-y+2z=0$ và 2 đường thẳng $(d): \frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{2}$, $(d'): \frac{x-1}{-2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{1}$. Viết phương trình đường thẳng (Δ) nằm trong mặt phẳng (P), vuông góc với đường thẳng (*d*) và cắt đường thẳng (*d*').

• *Ta có* $\vec{n}_P=(2;-1;2)$, $\vec{u}_d=(1;3;2)$ *và PTTS của (d'):* $\begin{cases} x=1-2t \\ y=2+t \\ z=t \end{cases}$

Gọi A = (d') ∩ (P) $\Rightarrow A(1-2t;2+t;t)$.

Do A ∈ (P) nên: $2(1-2t)-2-t+2t=0 \Leftrightarrow t=0 \Rightarrow A(1;2;0)$

Mặt khác (Δ) nằm trong (P), vuông góc với (d) nên $\vec{u}_\Delta$ *vuông góc với* $\vec{n}_P, \vec{u}_d$ $\Rightarrow$ *ta có thể chọn* $\vec{u}_\Delta=\left[\vec{n}_P,\vec{u}_d\right]=(-8;-2;7)$ $\Rightarrow$ *Phương trình* $\Delta: \frac{x-1}{-8}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z}{7}$

Câu 83. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho mặt phẳng (P): $2x-y+z-1=0$ và hai đường thẳng (d_1): $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-3}{3}$, ($d_2$): $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-2}{2}$. Viết phương trình đường thẳng (Δ) song song với mặt phẳng (P), vuông góc với đường thẳng (d_1) và cắt đường thẳng (d_2) tại điểm E có hoành độ bằng 3.

• *E ∈ (d₂)* $\Rightarrow$ *E(3; 7; 6).* $\begin{cases} \vec{a}_\Delta \perp \vec{n}_P \\ \vec{a}_\Delta \perp \vec{a}_{d1} \end{cases} \Rightarrow \vec{a}_\Delta=\left[\vec{n}_P,\vec{a}_{d1}\right]=-4(1;1;-1)$ $\Rightarrow$ *(Δ):* $\begin{cases} x=3+t \\ y=7+t \\ z=6-t \end{cases}$.

Câu 84. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho hai điểm A(0; 0;–3), B(2; 0;–1) và mặt phẳng (P) có phương trình: $3x-8y+7z+1=0$. Viết phương trình chính tắc đường thẳng d nằm trên mặt phẳng (P) và d vuông góc với AB tại giao điểm của đường thẳng AB với (P).

• *Giao điểm của đường thẳng AB và (P) là: C(2;0;–1)*

Đường thẳng d đi qua C và có VTCP là $\left[\overrightarrow{AB},\vec{n}_P\right]$ $\Rightarrow$ *d:* $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{-2}$

Câu 85. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng d_1: $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{1}$; d_2: $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{2}$ và mặt phẳng (P): $x-y-2z+3=0$. Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trên mặt phẳng (P) và cắt hai đường thẳng d_1 , d_2 .

• *Gọi A = d₁ ∩ Δ, B = d₂ ∩ Δ. Vì Δ ⊂ (P) nên A = d₁ ∩ (P), B = d₂ ∩ (P)*
$\Rightarrow$ *A(1; 0; 2), B(2; 3; 1)*

$\Rightarrow$ *Δ chính là đường thẳng AB* $\Rightarrow$ *Phương trình Δ:* $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{3}=\frac{z-2}{-1}$.

Câu 86. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, viết phương trình đường thẳng (d) vuông góc với mặt phẳng (P): $x+y+z-1=0$ đồng thời cắt cả hai đường thẳng $(d_1): \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{1}$ và $(d_2): \begin{cases} x=-1+t \\ y=-1 \\ z=-t \end{cases}$, với $t \in R$.

• *Lấy* $M \in (d_1) \Rightarrow M(1+2t_1;-1-t_1;t_1)$; $N \in (d_2) \Rightarrow N(-1+t;-1;-t)$

Suy ra $\overrightarrow{MN}=(t-2t_1-2;t_1;-t-t_1)$

$(d) \perp (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{MN}=k.\vec{n};k \in R^* \Leftrightarrow t-2t_1-2=t_1=-t-t_1 \Leftrightarrow \begin{cases} t=\frac{4}{5} \\ t_1=\frac{-2}{5} \end{cases} \Rightarrow M=\left(\frac{1}{5};-\frac{3}{5};-\frac{2}{5}\right)$

$\Rightarrow d$: $x-\frac{1}{5}=y+\frac{3}{5}=z+\frac{2}{5}$

Câu hỏi tương tự:

a) *Với (P):* $2x+y+5z+3=0$, $(d_1): \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{2}$, $(d_2): \frac{x-2}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-2}$

ĐS: $d: \frac{x+1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z+2}{5}$

b) *Với* $(P): 2x-y-5z+1=0$, $d_1: \frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-2}{1}$, $d_2: \frac{x-2}{1}=\frac{y+2}{5}=\frac{z}{-2}$

ĐS: $\frac{x-1}{2}=\frac{y-4}{-1}=\frac{z-3}{-5}$

Câu 87. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho ba mặt phẳng: (P): $2x-y+z+1=0$, (Q): $x-y+2z+3=0$, (R): $x+2y-3z+1=0$ và đường thẳng $\Delta_1: \frac{x-2}{-2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{3}$. Gọi Δ_2 là giao tuyến của (P) và (Q). Viết phương trình đường thẳng (*d*) vuông góc với (R) và cắt cả hai đường thẳng Δ_1, Δ_2.

• Δ_1 *có PTTS:* $\{x=2-2t;y=-1+t;z=3t$; Δ_2 *có PTTS:* $\{x=2+s;y=5+3s;z=s$.

Giả sử $d \cap \Delta_1 = A; d \cap \Delta_2 = B \Rightarrow A(2-2t;-1+t;3t), B(2+s;5+3s;s)$

$\overrightarrow{AB}=(s+2t;3s-t+6;s-3t)$, *(R) có VTPT* $\vec{n}=(1;2;-3)$.

$d \perp (R) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \vec{n}$ *cùng phương* $\Leftrightarrow \frac{s+2t}{1}=\frac{3s-t+6}{2}=\frac{s-3t}{-3} \Rightarrow t=\frac{23}{24} \Rightarrow A\left(\frac{1}{12};\frac{1}{12};\frac{23}{8}\right)$

Vậy phương trình của d: $\frac{x-\frac{1}{12}}{1}=\frac{y-\frac{1}{12}}{2}=\frac{z-\frac{23}{8}}{-3}$.

Câu 88. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho ba đường thẳng có phương trình $d_1: \begin{cases} x=t \\ y=4-t \\ z=-1+2t \end{cases}$, $d_2: \frac{x}{1}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z}{-3}$, $d_3: \frac{x+1}{5}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{1}$. Viết phương trình đường thẳng Δ, biết Δ cắt ba đường thẳng d_1, d_2, d_3 lần lượt tại các điểm A, B, C sao cho $AB=BC$.

• *Xét ba điểm A, B, C lần lượt nằm trên ba đường thẳng* d_1, d_2, d_3.

Giả sử $A(t;4-t;-1+2t)$, $B(u;2-3u;-3u)$, $C(-1+5v;1+2v;-1+v)$.

Ta có: A, B, C thẳng hàng và AB = BC $\Leftrightarrow$ *B là trung điểm của AC*

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t+(-1+5v)=2u \\ 4-t+(1+2v)=2.(2-3u) \\ -1+2t+(-1+v)=2(-3u) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ u=0 \\ v=0 \end{cases} \Rightarrow A(1;3;1),\ B(0;2;0),\ C(-1;1;-1).$$

Đường thẳng Δ đi qua A, B, C có phương trình: $\frac{x}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{1}$

Dạng 4: Viết phương trình đường thẳng liên quan đến khoảng cách

Câu 89. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz , cho đường thẳng (d): $\begin{cases} x=2+4t \\ y=3+2t \\ z=-3+t \end{cases}$ và mặt phẳng (P): $-x+y+2z+5=0$. Viết phương trình đường thẳng (Δ) nằm trong (P), song song với (d) và cách (d) một khoảng là $\sqrt{14}$.

• *Chọn* $A(2;3;-3)$, $B(6;5;-2)\in(d)$, *mà A, B* $\in(P)$ *nên* $(d)\subset(P)$.

Gọi $\vec{u}$ *là VTCP của* $(d_1)\subset(P)$, *qua A và vuông góc với (d) thì* $\begin{cases} \vec{u}\perp\vec{u}_d \\ \vec{u}\perp\vec{u}_P \end{cases}$

nên ta chọn $\vec{u}=[\vec{u}_d,\vec{u}_P]=(3;-9;6)$.

Phương trình của đường thẳng (d_1) : $\begin{cases} x=2+3t \\ y=3-9t \\ z=-3+6t \end{cases}$ $(t\in R)$

Lấy $M(2+3t;\ 3-9t;\ -3+6t)\in(d_1)$. *(Δ) là đường thẳng qua M và song song với (d).*

Theo đề : $AM=\sqrt{14}\Leftrightarrow\sqrt{9t^2+81t^2+36t^2}=\sqrt{14}\Leftrightarrow t^2=\frac{1}{9}\Leftrightarrow t=\pm\frac{1}{3}$

• $t=-\frac{1}{3}\Rightarrow M(1;6;-5)\Rightarrow(\Delta_1):\frac{x-1}{4}=\frac{y-6}{2}=\frac{z+5}{1}$

• $t=\frac{1}{3}\Rightarrow M(3;0;-1)\Rightarrow(\Delta_2):\frac{x-3}{4}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{1}$

Câu 90. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho mặt phẳng (P): $x+y-z+1=0$ và đường thẳng: *d*: $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{-3}$. Gọi I là giao điểm của *d* và (P). Viết phương trình của đường thẳng Δ nằm trong (P), vuông góc với *d* sao cho khoảng cách từ I đến Δ bằng $h=3\sqrt{2}$.

• *(P) có VTPT* $\vec{n}_P=(1;1;-1)$ *và d có VTCP* $\vec{u}=(1;-1;-3)$. $I=d\cap(P)\Rightarrow I(1;2;4)$

Vì $\Delta\subset(P);\Delta\perp d\Rightarrow\Delta$ *có véc tơ chỉ phương* $\vec{u}_\Delta=\left[\vec{n}_P,\vec{u}\right]=(-4;2;-2)$

Gọi H là hình chiếu của I trên $\Delta\Rightarrow H\in mp(Q)$ *qua I và vuông góc* Δ

$\Rightarrow$ *Phương trình (Q):* $-2(x-1)+(y-2)-(z-4)=0\Leftrightarrow-2x+y-z+4=0$

Gọi $d_1=(P)\cap(Q)\Rightarrow d_1$ *có VTCP* $\left[\vec{n}_P;\vec{n}_Q\right]=(0;3;3)=3(0;1;1)$ *và* d_1 *qua I* $\Rightarrow d_1:\begin{cases}x=1\\y=2+t\\z=4+t\end{cases}$

Giả sử $H\in d_1\Rightarrow H(1;2+t;4+t)\Rightarrow\overrightarrow{IH}=(0;t;t)$. *Ta có:*

$IH=3\sqrt{2}\Leftrightarrow\sqrt{2t^2}=3\sqrt{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=3\\t=-3\end{array}\right.$

• *Với* $t=3\Rightarrow H(1;5;7)\Rightarrow$ *Phương trình* $\Delta:\frac{x-1}{-2}=\frac{y-5}{1}=\frac{z-7}{-1}$

• *Với* $t=-3\Rightarrow H(1;-1;1)\Rightarrow$ *Phương trình* $\Delta:\frac{x-1}{-2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{-1}$.

Câu hỏi tương tự:

a) $(P):x+y+z+2=0$, $d:\frac{x-3}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z+1}{-1}$, $h=\sqrt{42}$.

ĐS: $\Delta:\frac{x-5}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z+5}{1}$; $\Delta:\frac{x+3}{2}=\frac{y+4}{-3}=\frac{z-5}{1}$

Câu 91. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho mặt phẳng (P): $2x+y-2z+9=0$ và đường thẳng $d:\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{7}=\frac{z-3}{-1}$. Viết phương trình đường thẳng Δ vuông góc với (P) và cắt *d* tại một điểm M cách (P) một khoảng bằng 2.

• *Vì* $\Delta\perp(P)$ *nên* Δ *nhận* $\vec{n}_P=(2;1;-2)$ *làm VTCP.*

Giả sử $M(t-1;7t+1;3-t)\in d$. *Ta có:* $d(M,(P))=2\Leftrightarrow|11t+2|=6\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-\frac{8}{11}\\t=\frac{4}{11}\end{array}\right.$

+ *Với* $t=-\frac{8}{11}\Rightarrow M\left(-\frac{19}{11};-\frac{45}{11};\frac{41}{11}\right)\Rightarrow\Delta:\left\{x=-\frac{19}{11}+2t;\ y=-\frac{45}{11}+t;\ z=\frac{41}{11}-2t\right.$

+ *Với* $t=\frac{4}{11}\Rightarrow M\left(-\frac{7}{11};\frac{39}{11};\frac{29}{11}\right)\Rightarrow\Delta:\left\{x=-\frac{7}{11}+2t;\ y=\frac{39}{11}+t;\ z=\frac{29}{11}-2t\right.$

Câu 92. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho mặt phẳng $(P):x+3y-z-1=0$ và các điểm $A(1;0;0)$; $B(0;-2;3)$. Viết phương trình đường thẳng *d* nằm trong (P) đi qua A và cách B một khoảng lớn nhất (nhỏ nhất).

• *Ta có:* $A(1;0;0)\in(P)$. *Gọi VTCP của đường thẳng d là:* $\vec{u}=(a;b;c)$, $a^2+b^2+c^2\neq0$

Ta có: $d\subset(P)\Leftrightarrow\vec{u}.\vec{n}_P=0\Leftrightarrow c=a+2b$

$\overrightarrow{AB}=(-1;2;-3)$; $\left[\overrightarrow{u_d},\overrightarrow{AB}\right]=(-2a-7b;2a-2b;2a+b)$

$\Rightarrow d(B,d)=\dfrac{\left|\left[\vec{u},\overrightarrow{AB}\right]\right|}{|\vec{u}|}=\sqrt{\dfrac{12a^2+24ab+54b^2}{2a^2+4ab+5b^2}}$

+ *<u>TH1</u>: Nếu b = 0 thì* $d(B,d)=\sqrt{6}$

+ *<u>TH2</u>: Nếu* $b\neq 0$. *Đặt* $t=\dfrac{a}{b}\Rightarrow d(B,d)=\sqrt{\dfrac{12t^2+24t+54}{2t^2+4t+5}}=\sqrt{f(t)}$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{12t^2+24t+54}{2t^2+4t+5}$ *ta suy ra được* $\sqrt{6}\le d(B,d)=f(t)\le\sqrt{14}$

So sánh TH1 và TH2 $\Rightarrow \sqrt{6}\le d(B,d)\le\sqrt{14}$

Do đó:

a) $\min(d(B,d))=\sqrt{6}\Leftrightarrow b=0$. *Chọn a =1* $\Rightarrow$ *c= 1*

$\Rightarrow$ *Phương trình đường thẳng d:* $\begin{cases}x=1+t\\y=0\\z=t\end{cases}$

b) $\max(d(B,d))=\sqrt{14}\Leftrightarrow a=-b$. *Chọn b = –1* $\Rightarrow$ *a =1 , c = –1*

$\Rightarrow$ *Phương trình đường thẳng d:* $\begin{cases}x=1+t\\y=-t\\z=-t\end{cases}$

Câu 93. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho mặt phẳng $(P): x-2y+2z-5=0$ và các điểm $A(-3;0;1)$; $B(1;-1;3)$. Viết phương trình đường thẳng *d* đi qua A, song song với (P) và cách B một khoảng nhỏ nhất.

• *ĐS:* $d:\dfrac{x+3}{26}=\dfrac{y}{11}=\dfrac{z-1}{-2}$.

Câu 94. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho đường thẳng $\Delta:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$, hai điểm $A(0;-1;2)$, $B(2;1;1)$. Viết phương trình đường thẳng *d* đi qua A và cắt đường thẳng Δ sao cho khoảng cách từ B đến *d* là lớn nhất (nhỏ nhất).

• *Gọi* $M=d\cap\Delta$. *Giả sử* $M(-1+2t;t;2-t)$. *VTCP của d:* $\vec{u}_d=\overrightarrow{AM}=(2t-1;t+1;-t)$

$\overrightarrow{AB}(2;2;-1)$; $\left[\overrightarrow{AB};\vec{u}_d\right]=(1-t;1;4-2t)$

$\Rightarrow d(B,d)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\vec{u}_d\right]\right|}{|\vec{u}_d|}=\sqrt{\dfrac{12t^2-18t+18}{6t^2-2t+2}}=\sqrt{f(t)}$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{12t^2+24t+54}{2t^2+4t+5}$. *Ta có* $\max f(t)=f(0)=18;\ \min f(t)=f(2)=\dfrac{1}{11}$

$\Rightarrow \sqrt{\dfrac{1}{11}}\le d(B,d)\le\sqrt{18}$

a) $\min(d(B,d))=\sqrt{\dfrac{1}{11}}\Leftrightarrow t=2\Rightarrow$ *Phương trình đường thẳng d:* $\begin{cases}x=3t\\y=-1+3t\\z=2-2t\end{cases}$

b) $\max(d(B,d)) = \sqrt{18} \Leftrightarrow t = 0 \Rightarrow$ *Phương trình đường thẳng d:* $\begin{cases} x = -t \\ y = -1 + t \\ z = 2 - t \end{cases}$

Câu hỏi tương tự:

a) $\Delta: \begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ x - y + z - 1 = 0 \end{cases}, A(2;1;-1), B(-1;2;0)$.

ĐS: $d_{max}: \begin{cases} x + 1 = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases}; d_{\min}: \begin{cases} x + 2y - 3 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases}$

b) $\Delta: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-1}{-1}, A(3;-2;1),\ B(2;1;-1)$.

ĐS: $d_{max}: \dfrac{x-3}{19} = \dfrac{y+2}{-3} = \dfrac{z-1}{5};\ d_{\min}: \dfrac{x-3}{-5} = \dfrac{y+20}{20} = \dfrac{z-1}{-7}$.

c) $\Delta: \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z}{2}, A(1;4;2),\ B(-1;2;4)$.

ĐS: $d_{max}: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-4}{-4} = \dfrac{z-2}{-3};\ d_{\min}: \dfrac{x-1}{15} = \dfrac{y-4}{18} = \dfrac{z-2}{19}$

Câu 95. Trong không gian với hệ toạ độ O*xyz*, cho đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z}{1}$, hai điểm $A(1;1;0), B(2;1;1)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A và vuông góc với *d*, sao cho khoảng cách từ B đến Δ là lớn nhất.

• *Ta có VTCP của d là:* $\vec{u}_d = (2;1;1)$ *và* $\overrightarrow{AB} = (1;0;1)$.

Gọi H là hình chiếu của B lên Δ *ta có:* $d(B,\Delta) = BH \le AB$. *Do đó khoảng cách từ B đến* Δ *lớn nhất khi* $H \equiv A$. *Khi đó* Δ *là đường thẳng đi qua A và vuông góc với AB.*

Ta có $\begin{cases} \Delta \perp d \\ \Delta \perp AB \end{cases} \Rightarrow$ *Có thể chọn VTCP của* Δ *là* $\vec{u}_\Delta = \left[\vec{u}_d, \overrightarrow{AB}\right] = (1;-1;-1)$

$\Rightarrow$ *PT của* Δ *là:* $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = -t \end{cases}$

Câu 96. Trong không gian với hệ toạ độ O*xyz*, viết phương trình đường thẳng *d* đi qua $A(0;-1;2)$, cắt đường thẳng $\Delta_1: \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-2}{-1}$ sao cho khoảng cách giữa *d* và đường thẳng $\Delta_2: \dfrac{x-5}{2} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z}{1}$ là lớn nhất.

• *Gọi* $M = d \cap \Delta_1$. *Giả sử* $M(-1+2t;t;2-t)$.*VTCP của d :* $\vec{u}_d = \overrightarrow{AM} = (2t-1;t+1;-t)$

Δ_2 *đi qua* $N(5;0;0)$ *và có VTCP* $\vec{v}_\Delta = (2;-2;1)$; $\overrightarrow{AN} = (5;1;-2)$; $\left[\vec{v}_\Delta; \vec{u}_d\right] = (t-1;4t-1;6t)$

$$\Rightarrow d(\Delta_2, d) = \frac{\left|\left[\vec{v}_\Delta, \vec{u}_d\right].\overrightarrow{AN}\right|}{\left|\left[\vec{v}_\Delta, \vec{u}_d\right]\right|} = 3.\sqrt{\frac{(2+t)^2}{53t^2 - 10t + 2}} = 3.\sqrt{f(t)}$$

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{(2+t)^2}{53t^2 - 10t + 2}$. *Ta suy ra được* $\max f(t) = f(\frac{4}{37}) = \dfrac{26}{9}$

$\Rightarrow \max(d(\Delta, d)) = \sqrt{26} \Rightarrow$ *Phương trình đường thẳng d:* $\{x = 29t;\ y = -1 - 41t;\ z = 2 + 4t$

Câu hỏi tương tự:

a) $A(2;-1;2), \Delta_1: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-1}{1}, \Delta_2: \begin{cases} x+2y-z+1=0 \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$. *ĐS:* $d: \dfrac{x-2}{41}=\dfrac{y+1}{68}=\dfrac{z-2}{-27}$.

Câu 97. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, viết phương trình đường thẳng *d* đi qua $A(1;-1;2)$, song song với mặt phẳng $(P): x+y-z+1=0$ sao cho khoảng cách giữa *d* và đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x+y+z-3=0 \\ 2x-y+z-2=0 \end{cases}$ là lớn nhất.

• *ĐS:* $\begin{cases} x=1 \\ y=-1+t \\ z=2+t \end{cases}$.

Dạng 5: Viết phương trình đường thẳng liên quan đến góc

Câu 98. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz,* cho điểm A(3; –1; 1), đường thẳng Δ: $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z}{2}$ và mặt phẳng (P): $x-y+z-5=0$. Viết phương trình tham số của đường thẳng *d* đi qua A, nằm trong (P) và hợp với đường thẳng Δ một góc 45^0.

• *Gọi $\vec{u}_d, \vec{u}_\Delta, \vec{n}_P$ lần lượt là các VTCP của d, Δ và VTPT của (P).*

Giả sử $\vec{u}_d=(a;b;c)$ $(a^2+b^2+c^2\neq 0)$.

+ *Vì d* $\subset$ *(P) nên* $\vec{u}_d \perp \vec{n}_P \Rightarrow a-b+c=0 \Leftrightarrow b=a+c$ *(1)*

+ $(d,\Delta)=45^0 \Leftrightarrow \dfrac{|a+2b+2c|}{3\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 2(a+2b+c)^2=9(a^2+b^2+c^2)$ *(2)*

Từ (1) và (2) ta được: $14c^2+30ac=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=0 \\ 15a+7c=0 \end{array}\right.$

+ *Với c = 0: chọn a = b = 1* $\Rightarrow$ *PTTS của d:* $\{x=3+t;\ y=-1-t;\ z=1$

+ *Với 15a + 7c = 0: chọn a = 7, c = –15, b = –8*

$\Rightarrow$ *PTTS của d:* $\{x=3+7t;\ y=-1-8t;\ z=1-15t$.

Câu 99. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, viết phương trình đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng $(P): x+y-z+1=0$, cắt các đường thẳng $d_1: \begin{cases} x=1+t \\ y=t \\ z=2+2t \end{cases}$; $d_2: \begin{cases} x=3-t \\ y=1+t \\ z=1-2t \end{cases}$ và tạo với d_1 một góc 30^0.

• *Ta có* $d_1 \subset (P)$. *Gọi* $A=d_2\cap(P) \Rightarrow A(5;-1;5)$. d_1 *có VTCP* $\vec{u}_1=(1;1;2)$.

Lấy $B(1+t;t;2+2t)\in d_1 \Rightarrow \overrightarrow{AB}=(t-4;t+1;2t-3)$ *là VTCP của Δ*

Ta có $\cos(\Delta,d_1)=\cos 30^0 \Leftrightarrow \dfrac{|6t-9|}{\sqrt{6}\sqrt{(t-4)^2+(t+1)^2+(2t-3)^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=4 \end{array}\right.$

+ *Với* $t=-1$ *thì* $\overrightarrow{AB}=(-5;0;-5) \Rightarrow$ *d:* $\begin{cases} x=5+t \\ y=-1 \\ z=5+t \end{cases}$

+ *Với* $t=4$ *thì* $\overrightarrow{AB}=(0;5;5) \Rightarrow$ *d:* $\begin{cases} x=5 \\ y=-1+t \\ z=5+t \end{cases}$

Câu 100. Trong không gian với hệ tọa độ O*xyz*, cho hình chóp A.OBC, trong đó A(1; 2; 4), B thuộc trục Ox và có hoành độ dương, C thuộc Oy và có tung độ dương. Mặt phẳng (ABC) vuông góc với mặt phẳng (OBC), $\tan OBC=2$. Viết phương trình tham số của đường thẳng BC.

• *BC:* $\{x=2+t; y=-2t; z=0$.

Câu 101. Trong không gian với hệ tọa độ O*xyz*, cho hai điểm $A(2;-1;1), B(0;1;-2)$ và đường thẳng $d: \frac{x}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{2}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua giao điểm của đường thẳng *d* với mặt phẳng (OAB), nằm trong mặt phẳng (OAB) và hợp với đường thẳng *d* một góc α sao cho $\cos\alpha=\frac{5}{6}$.

• *PT mặt phẳng (OAB):* $x+4y+2z=0$. *Gọi* $M=d\cap(OAB) \Rightarrow M(-10;13;-21)$.

Giả sử Δ có VTCP $\vec{u}=(a;b;c)$

+ *Vì* $\Delta\subset(OAB)$ *nên* $a+4b+2c=0$ *(1)*

+ $\cos\alpha=\frac{5}{6} \Leftrightarrow \frac{|a-b+2c|}{\sqrt{6}\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{5}{6}$ *(2)*

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} b=\frac{5}{11}c, a=-\frac{2}{11}c \\ b=c, a=-6c \end{array}\right.$

+ *Với* $b=\frac{5}{11}c, a=-\frac{2}{11}c \Rightarrow \vec{u}=(2;-5;-11) \Rightarrow$ *PT của Δ:* $\frac{x+10}{2}=\frac{y-13}{-5}=\frac{z+21}{-11}$

+ *Với* $b=c, a=-6c \Rightarrow \vec{u}=(6;-1;-1) \Rightarrow$ *PT của Δ:* $\frac{x+10}{6}=\frac{y-13}{-1}=\frac{z+21}{-1}$

Câu 102. Trong không gian với hệ tọa độ O*xyz*, viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $A(0;1;-2)$, vuông góc với đường thẳng $d: \frac{x+3}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{1}$ và tạo với mặt phẳng (P): $2x+y-z+5=0$ một góc $a=30^0$.

• *Giả sử Δ có VTCP* $\vec{u}=(a;b;c)$.

Ta có: $\begin{cases} \vec{a}\perp d \\ \cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b+c=0 \\ \frac{|2a+b-c|}{\sqrt{6}\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=0, a=b \\ c=-2a, b=-a \end{array}\right.$

+ *Với* $c=0, a=b \Rightarrow \vec{u}=(1;1;0) \Rightarrow$ *Δ:* $\{x=t;\ y=1+t;\ z=-2$

+ *Với* $c=-2a, b=-a \Rightarrow \vec{u}=(1;-1;-2) \Rightarrow$ *Δ:* $\{x=t;\ y=1-t;\ z=-2-2t$.

Câu 103. Trong không gian với hệ tọa độ O*xyz*, viết phương trình đường thẳng *d* đi qua

$A(1;-1;2)$, song song với mặt phẳng $(P): 2x-y-z+3=0$, đồng thời tạo với đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{2}$ một góc lớn nhất (nhỏ nhất).

• *Δ có VTCP* $\vec{u}_\Delta=(1;-2;2)$. *Gọi VTCP của đường thẳng d là* $\vec{u}=(a;b;c)$.

$d \parallel (P) \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{n}_P=0 \Leftrightarrow c=2a-b$. *Gọi góc giữa hai mặt phẳng là* α.

$$\Rightarrow \cos\alpha=\frac{|5a-4b|}{3\sqrt{5a^2-4ab+2b^2}}=\frac{1}{3}.\sqrt{\frac{(5a-4b)^2}{5a^2-4ab+2b^2}}$$

+ *<u>TH1</u>: Nếu b = 0 thì* $\cos\alpha=\frac{1}{3}.\sqrt{5}$

+ *<u>TH2</u>: Nếu* $b\neq 0$. *Đặt* $t=\frac{a}{b} \Rightarrow \cos\alpha=\frac{1}{3}.\sqrt{\frac{(5t-4)^2}{5t^2-4t+2}}=\frac{1}{3}.\sqrt{f(t)}$

Xét hàm số $f(t)=\frac{(5t-4)^2}{5t^2-4t+2}$. *Ta suy ra được:* $0\le\cos\alpha=\sqrt{f(t)}\le\frac{5\sqrt{3}}{9}$

So sánh TH1 và TH2, ta suy ra: $0\le\cos\alpha\le\frac{5\sqrt{3}}{9}$

Do đó:

a) $\min(\cos\alpha)=0 \Leftrightarrow \frac{a}{b}=\frac{4}{5} \Rightarrow$ *Phương trình đường thẳng d :* $\frac{x-1}{4}=\frac{y+1}{5}=\frac{z-2}{3}$

b) $\max(\cos\alpha)=\frac{5\sqrt{3}}{9} \Leftrightarrow \frac{a}{b}=-\frac{1}{5} \Rightarrow$ *Phương trình đường thẳng d:* $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-5}=\frac{z-2}{7}$

Câu 104. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, viết phương trình đường thẳng *d* đi qua $A(-1;0;-1)$, cắt đường thẳng $\Delta_1: \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+2}{-1}$ sao cho góc giữa *d* và đường thẳng $\Delta_2: \frac{x-3}{-1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{2}$ là lớn nhất (nhỏ nhất).

• *Gọi* $M=d\cap\Delta_1$. *Giả sử* $M(1+2t;2+t;-2-t)$.

VTCP của d : $\vec{u}_d=\overrightarrow{AM}=(2t+2;t+2;-1-t)$. *Gọi a* $=(d,\Delta_2)$.

$$\Rightarrow \cos\alpha=\frac{2}{3}.\sqrt{\frac{t^2}{6t^2+14t+9}}\frac{2}{3}.\sqrt{f(t)}$$

Xét hàm số $f(t)=\frac{t^2}{6t^2+14t+9}$. *Ta suy ra được* $\max f(t)=f(-\frac{9}{7})=\frac{9}{5}$; $\min f(t)=f(0)=0$

a) $\min(\cos\alpha)=0 \Leftrightarrow t=0 \Rightarrow$ *Phương trình đường thẳng d :* $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{-1}$

b) $\max(\cos\alpha)=\frac{2\sqrt{5}}{5} \Leftrightarrow t=-\frac{9}{7} \Rightarrow$ *Phương trình đường thẳng d :* $\frac{x+1}{4}=\frac{y}{5}=\frac{z+1}{2}$

Dạng 6: Viết phương trình đường thẳng liên quan đến tam giác

Câu 105. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho ΔABC với tọa độ đỉnh C(3; 2; 3) và phương trình đường cao AH, phương trình đường phân giác trong BD lần lượt là: $d_1: \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-3}{-2}$, $d_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-3}{1}$. Lập phương trình đường thẳng chứa cạnh BC của ΔABC và tính diện tích của ΔABC.

- *Gọi mp(P) qua C và vuông góc với AH* $\Rightarrow (P) \perp d_1 \Rightarrow (P): x + y - 2z + 1 = 0$

$B = (P) \cap d_2 \Rightarrow B(1;4;3)$ $\Rightarrow$ *phương trình* $BC: \{x = 1 + 2t;\ y = 4 - 2t;\ z = 3$

Gọi mp(Q) qua C, vuông góc với d_2, (Q) cắt d_2 và AB tại K và M. Ta có:
$(Q): x - 2y + z - 2 = 0 \Rightarrow K(2;2;4) \Rightarrow M(1;2;5)$ *(K là trung điểm của CM).*

$\Rightarrow AB: \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 + 2t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$, *do* $A = AB \cap d_1 \Rightarrow A(1;2;5) \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left\|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right\| = 2\sqrt{3}$.

Câu 106. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho ΔABC với $A(1;-1;1)$ và hai đường trung tuyến lần lượt có phương trình là $d_1: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-2}{-2}$, $d_2: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 0 \\ z = 1 + t \end{cases}$. Viết phương trình đường phân giác trong của góc *A*.

- *Ta có* $A \notin d_1, A \notin d_2$. *Gọi* $M \in d_1$, $N \in d_2$ *lần lượt là trung điểm AC, AB.*

$N(1-t;0;1+t)$ $\Rightarrow B(1-2t;1;1+2t)$. $B \in d_1 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow B(0;1;2)$

$M(2t;1-3t;2-2t)$ $\Rightarrow C(4t-1;3-6t;3-4t)$. $C \in d_2 \Rightarrow t = \frac{1}{2} \Rightarrow C(1;0;1)$

Ta có: $AB = \sqrt{6}$, $AC = 1$. *Gọi AD là đường phân giác trong của góc A thì* $\overrightarrow{DB} = -\sqrt{6}\overrightarrow{DC}$

$\Rightarrow D\left(\frac{\sqrt{6}}{1+\sqrt{6}};\frac{1}{1+\sqrt{6}};\frac{2+\sqrt{6}}{1+\sqrt{6}}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AD} = \left(\frac{-1}{1+\sqrt{6}};\frac{2+\sqrt{6}}{1+\sqrt{6}};\frac{1}{1+\sqrt{6}}\right)$

Vậy phương trình đường thẳng AD là: $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{2+\sqrt{6}} = \frac{z-1}{1}$.

TĐKG 03: VIẾT PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

Dạng 1: Viết phương trình mặt cầu bằng cách xác định tâm và bán kính

Câu 107. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho điểm $I(1;-2;3)$. Viết phương trình mặt cầu tâm I và tiếp xúc với trục *Oy*.

• *Gọi M là hình chiếu của* $I(1;-2;3)$ *lên Oy, ta có:* $M(0;-2;0)$.

$\overrightarrow{IM}=(-1;0;-3) \Rightarrow R=IM=\sqrt{10}$ *là bán kính mặt cầu cần tìm.*

Kết luận: PT mặt cầu cần tìm là $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=10$.

Câu 108. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho hai đường thẳng: (d_1) : $\{x=2t;\ y=t;\ z=4$ và (d_2) : $\{x=3-t;\ y=t;\ z=0$. Chứng minh (d_1) và (d_2) chéo nhau. Viết phương trình mặt cầu (S) có đường kính là đoạn vuông góc chung của (d_1) và (d_2).

• *Gọi MN là đường vuông góc chung của (d_1) và (d_2)* $\Rightarrow M(2;\ 1;\ 4);\ N(2;\ 1;\ 0)$

$\Rightarrow$ *Phương trình mặt cầu (S):* $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=4$.

Câu hỏi tương tự:

a) $d_1: \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{2}$, $d_2: \begin{cases} x=2-2t' \\ y=3 \\ z=t' \end{cases}$.   *ĐS:* $(S): \left(x-\dfrac{11}{6}\right)^2+\left(y-\dfrac{13}{6}\right)^2+\left(z+\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{5}{6}$

b) $(d_1): \dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{2}, (d_2): \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+4}{6}=\dfrac{z-2}{2}$

ĐS: $(S): (x-2)^2+\left(y-\dfrac{5}{2}\right)^2+(z-3)^2=\dfrac{9}{4}$

Câu 109. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho hai đường thẳng: $d_1: \dfrac{x-4}{3}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+5}{-2}$ và $d_2: \begin{cases} x=2+t \\ y=-3+3t \\ z=t \end{cases}$. Viết phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với cả hai đường thẳng d_1 và d_2.

• *Mặt cầu nhận đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng là đường kính.*

Câu hỏi tương tự:

a) $d_1: \begin{cases} x=2t \\ y=t \\ z=4 \end{cases}$, $d_2: \begin{cases} x=3-t \\ y=t \\ z=0 \end{cases}$.   *ĐS:* $(S): (x-2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=4$

Câu 110. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho đường thẳng (Δ_1) có phương trình $\{x=2t; y=t; z=4$; (Δ_2) là giao tuyến của 2 mặt phẳng $(\alpha): x+y-3=0$ và $(\beta): 4x+4y+3z-12=0$. Chứng tỏ hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 chéo nhau và viết phương trình mặt cầu nhận đoạn vuông góc chung của Δ_1, Δ_2 làm đường kính.

• *Gọi AB là đường vuông góc chung của* Δ_1, Δ_2: $A(2t;t;4) \in \Delta_1$, $B(3+s;-s;0) \in \Delta_2$

$AB \perp \Delta_1$, $AB \perp \Delta_2 \Rightarrow A(2;1;4),\ B(2;1;0)$

$\Rightarrow$ *Phương trình mặt cầu là:* $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=4$

Câu 111. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có A ≡ O, B(3;0;0), D(0;2;0), A'(0;0;1). Viết phương trình mặt cầu tâm C tiếp xúc với AB'.

• *Kẻ* $CH \perp AB'$, $CK \perp DC'$ $\Rightarrow CK \perp (ADC'B')$ *nên* ΔCKH *vuông tại K.*

$\Rightarrow CH^2=CK^2+HK^2=\dfrac{49}{10}$. *Vậy phương trình mặt cầu:* $(x-3)^2+(y-2)^2+z^2=\dfrac{49}{10}$

Câu 112. Trong không gian với hệ trục toạ độ *Oxyz*, cho 4 điểm *A*(1; –1; 2), *B*(1; 3; 2), *C*(4; 3; 2), *D*(4; –1; 2) và mặt phẳng (*P*) có phương trình: $x+y+z-2=0$. Gọi *A*' là hình chiếu của *A* lên mặt phẳng *Oxy*. Gọi (*S*) là mặt cầu đi qua 4 điểm *A′, B, C, D*. Xác định toạ độ tâm và bán kính của đường tròn (*C*) là giao của (*P*) và (*S*).

• *Dễ thấy A′(1; –1; 0). Phương trình mặt cầu (S):* $x^2+y^2+z^2-5x-2y-2z+1=0$

$\Rightarrow$ *(S) có tâm* $I\left(\dfrac{5}{2};1;1\right)$, *bán kính* $R=\dfrac{\sqrt{29}}{2}$

+) *Gọi H là hình chiếu của I lên (P). H là tâm của đường tròn (C)*

+) *PT đường thẳng (d) đi qua I và vuông góc với (P): d:* $\begin{cases} x=5/2+t \\ y=1+t \\ z=1+t \end{cases} \Rightarrow H\left(\dfrac{5}{3};\dfrac{1}{6};\dfrac{1}{6}\right)$

$IH=\sqrt{\dfrac{75}{36}}=\dfrac{5\sqrt{3}}{6}$, *(C) có bán kính* $r=\sqrt{R^2-IH^2}=\sqrt{\dfrac{29}{4}-\dfrac{75}{36}}=\sqrt{\dfrac{31}{6}}=\dfrac{\sqrt{186}}{6}$

Câu 113. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho điểm A(1; –2; 3) và đường thẳng d có phương trình $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+3}{-1}$. Tính khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng d. Viết phương trình mặt cầu tâm A, tiếp xúc với d.

• *d(A, (d))* = $\dfrac{\left[\overrightarrow{BA},\vec{a}\right]}{|\vec{a}|}=\dfrac{\sqrt{4+196+100}}{\sqrt{4+1+1}}=5\sqrt{2}$

PT mặt cầu tâm A (1; –2; 3), bán kính R = $5\sqrt{2}$: $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=50$

Câu 114. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $d:\dfrac{x+5}{2}=\dfrac{y-7}{-2}=\dfrac{z}{1}$ và điểm $M(4;1;6)$. Đường thẳng *d* cắt mặt cầu (S), có tâm M, tại hai điểm A, B sao cho $AB=6$. Viết phương trình của mặt cầu (S).

• *d đi qua* $N(-5;7;0)$ *và có VTCP* $\vec{u}=(2;-1;1)$; $\overrightarrow{MN}=(-9;6;-6)$.

Gọi H là chân đường vuông góc vẽ từ M đên đường thẳng d $\Rightarrow MH = d(M,d)=3$.

Bán kính mặt cầu (S): $R^2=MH^2+\left(\dfrac{AB}{2}\right)^2=18$.

$\Rightarrow$ *PT mặt cầu (S):* $(x-4)^2+(y-1)^2+(z-6)^2=18$.

Câu 115. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho mặt phẳng $(\alpha):2x-y+2z-3=0$ và mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x+4y-8z-4=0$. Xét vị trí tương đối của mặt cầu (S) và mặt phẳng (α). Viết phương trình mặt cầu (S′) đối xứng với mặt cầu (S) qua mặt phẳng (α).

• $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=25$ *có tâm* $I(1;-2;4)$ *và R = 5.*

Khoảng cách từ I đến (α) là: $d(I,(\alpha))=3<R \Rightarrow$ *(α) và mặt cầu (S) cắt nhau.*

Gọi J là điểm đối xứng của I qua (α). Phương trình đường thẳng IJ : $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-2-t \\ z=4+2t \end{cases}$

Toạ độ giao điểm H của IJ và (α) thoả $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-2-t \\ z=4+2t \\ 2x-y+2z-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-1 \\ x=-1 \\ y=-1 \\ z=2 \end{cases} \Rightarrow H(-1;-1;2)$

Vì H là trung điểm của IJ nên $J(-3;0;0)$. *Mặt cầu (S′) có tâm J bán kính R′ = R = 5 nên có phương trình:* $(S'):(x+3)^2+y^2+z^2=25$.

Câu 116. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, lập phương trình mặt cầu (S) biết rằng mặt phẳng Oxy và mặt phẳng (P): $z=2$ lần lượt cắt (S) theo hai đường tròn có bán kính bằng 2 và 8.

• *Từ giả thiết ta có vô số mặt cầu (S) thoả YCBT. Gọi (S_0) là mặt cầu có tâm* $I_0(0;0;m)$ *thuộc trục Oz. Khi đó mp(Oxy) và mp(P) cắt (S_0) theo 2 đường tròn tâm* $O_1\equiv O(0;0;0)$, *bán kính* $R_1=2$ *và tâm* $O_2(0;0;2)$, *bán kính* $R_2=8$.

Gọi R là bán kính mặt cầu thì $\begin{cases} R^2=2^2+|m|^2 \\ R^2=8^2+|m-2|^2 \end{cases} \Rightarrow 4+m^2=64+(m-2)^2 \Rightarrow m=16$

$\Rightarrow R=2\sqrt{65}$ *và* $I_0(0;0;16)$. *Suy ra mặt cầu (S) có tâm* $I(a;b;16)$ *(a, b ∈ R), bán kính* $R=2\sqrt{65}$.

Vậy phương trình mặt cầu (S): $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-16)^2=260$ *(a, b ∈ R).*

Câu 117. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng (P): $2x-y-2z-2=0$ và đường thẳng *d*: $\frac{x}{-1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{1}$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I thuộc *d*, I cách (P) một khoảng bằng 2 và (P) cắt (S) theo một đường tròn (C) có bán kính bằng 3.

• *Giả sử* $I(-t;2t-1;t+2)\in d$, *R là bán kính của (S), r là bán kính của (C).*

Ta có: $d(I,(P))=2 \Leftrightarrow |-6t-5|=6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{1}{6} \\ t=-\frac{11}{6} \end{array}\right.$. $R^2=\left(d(I,(P)\right)^2+r^2=13$

+ *Với* $t=\frac{1}{6} \Rightarrow I\left(-\frac{1}{6};-\frac{2}{3};\frac{13}{6}\right) \Rightarrow$ *(S):* $\left(x+\frac{1}{6}\right)^2+\left(y+\frac{2}{3}\right)^2+\left(z-\frac{13}{6}\right)^2=13$

+ *Với* $t=-\frac{11}{6} \Rightarrow I\left(\frac{11}{6};-\frac{14}{3};\frac{1}{6}\right) \Rightarrow$ *(S):* $\left(x-\frac{11}{6}\right)^2+\left(y+\frac{14}{3}\right)^2+\left(z-\frac{1}{6}\right)^2=13$

Câu 118. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho 2 điểm A(0; 0; 4), B(2; 0; 0) và mặt phẳng (P): $2x+y-z+5=0$. Lập phương trình mặt cầu (S) đi qua O, A, B và có khoảng cách từ tâm I của mặt cầu đến mặt phẳng (P) bằng $\frac{5}{\sqrt{6}}$.

• *Giả sử (S):* $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$.

+ *Từ O, A, B* $\in$ *(S) suy ra:* $\begin{cases} a=1 \\ c=2 \\ d=0 \end{cases} \Rightarrow I(1;b;2)$.

+ $d(I,(P))=\dfrac{5}{\sqrt{6}} \Leftrightarrow \dfrac{|b+5|}{\sqrt{6}}=\dfrac{5}{\sqrt{6}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=0 \\ b=-10 \end{array}\right.$

Vậy (S): $x^2+y^2+z^2-2x-4z=0$ *hoặc (S):* $x^2+y^2+z^2-2x+20y-4z=0$

Câu 119. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho các điểm $A(1;3;4), B(1;2;-3), C(6;-1;1)$ và mặt phẳng $(\alpha): x+2y+2z-1=0$. Lập phương trình mặt cầu (S) có tâm nằm trên mặt phẳng (α) và đi qua ba điểm A,B,C. Tính diện tích hình chiếu của tam giác ABC trên mặt phẳng (α).

• *Goi* $I(a;b;c)$ *là tâm mặt cầu ta có :*

$$\begin{cases} IA=IB \\ IA=IC \\ I\in(a) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-a)^2+(3-b)^2+(4-c)^2=(1-a)^2+(2-b)^2+(-3-c)^2 \\ (1-a)^2+(3-b)^2+(4-c)^2=(6-a)^2+(-1-b)^2+(1-c)^2 \\ a+2b+2c-1=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b+7c=6 \\ 5a-4b-3c=6 \\ a+2b+2c-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=1 \end{cases} \Rightarrow I(1;-1;1) \Rightarrow R^2=IA^2=25$$

$\Rightarrow$ *Phương trình* $(S):(x-1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=25$

Tam giác ABC *đều cạnh bằng* $5\sqrt{2}$ *nên* $S_{ABC}=\dfrac{25\sqrt{3}}{2}$

$\overrightarrow{AB}=(0;-1;-7),\ \overrightarrow{AC}=(5;-4;-3) \Rightarrow \vec{p}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-25;-35;5)$

$\cos((\alpha),(ABC))=\left|\cos\left(\vec{n}_a,\vec{p}\right)\right|=\dfrac{17}{15\sqrt{3}}$

Gọi S' *là diện tích hình chiếu của tam giác* ABC *lên mặt phẳng* (α)

Ta có $S'=S_{ABC}.\cos((\alpha),(ABC))=\dfrac{50\sqrt{3}}{4}\dfrac{17}{15\sqrt{3}}=\dfrac{85}{6}$ *(đvdt)*

Câu 120. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho đường thẳng *d*: $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{1}$ và mặt phẳng (P): $2x+y-2z+2=0$. Lập phương trình mặt cầu (S) có tâm nằm trên đường thẳng *d* có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với (P) và đi qua điểm A(1; –1; 1).

• *Gọi I là tâm của (S). I* $\in d \Rightarrow I(1+3t;-1+t;t)$. *Bán kính R = IA =* $\sqrt{11t^2-2t+1}$.

Mặt phẳng (P) tiếp xúc với (S) nên: $d(I,(P))=\dfrac{|5t+3|}{3}=R$

$$\Leftrightarrow 37t^2-24t=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \quad \Rightarrow R=1 \\ t=\dfrac{24}{37} \quad \Rightarrow R=\dfrac{77}{37} \end{array}\right..$$

Vì (S) có bán kính nhỏ nhất nên chọn t = 0, R = 1. Suy ra I(1; –1; 0).

Vậy phương trình mặt cầu (S): $(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=1$.

Câu 121. Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng *d*: $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z}{1}$ và mặt phẳng (P): $2x+y-2z+2=0$. Lập phương trình mặt cầu (S) có tâm nằm trên *d*, tiếp xúc với mặt phẳng (P) và đi qua điểm A(2; –1; 0).

• *Gọi I là tâm của (S)* $\Rightarrow I\left(1+t;t-2;t\right)$. *Ta có d(I, (P)) = AI* $\Leftrightarrow t=1;\ t=\frac{7}{13}$.

Vậy: $(S):\ (x-2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=1$

hoặc $(S):\ \left(x-\frac{20}{13}\right)^2+\left(y+\frac{19}{13}\right)^2+\left(z-\frac{7}{13}\right)^2=\frac{121}{169}$.

Câu 122. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho điểm $I(1;2;-2)$, đường thẳng Δ: $2x-2=y+3=z$ và mặt phẳng (P): $2x+2y+z+5=0$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I sao cho mặt phẳng (P) cắt khối cầu theo thiết diện là hình tròn có chu vi bằng 8π. Từ đó lập phương trình mặt phẳng (Q) chứa Δ và tiếp xúc với (S).

• *Ta có:* $d=d(I,(P))=3$. *Gọi r là bán kính hình tròn thiết diện. Ta có:* $2\pi r=8\pi\Rightarrow r=4$

Suy ra bán kính mặt cầu: $R^2=r^2+d^2=25\ \Rightarrow (S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=25$

Nhận thấy mặt cầu (S) tiếp xúc với (Δ) *tại điểm* $M\left(\frac{5}{3};-\frac{5}{3};\frac{4}{3}\right)$.

Do đó: (Q) chứa (Δ) *và tiếp xúc với (S) đi qua* $M\left(\frac{5}{3};-\frac{5}{3};\frac{4}{3}\right)$ *và có VTPT* $\overrightarrow{MI}\left(\frac{2}{3};-\frac{11}{3};\frac{10}{3}\right)$

$\Rightarrow$ *PT mặt phẳng (Q):* $6x-33y+30z-105=0$.

Câu 123. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho đường thẳng $d:\{x=t;\ y=-1;\ z=-t$ và 2 mặt phẳng (P): $x+2y+2z+3=0$ và (Q): $x+2y+2z+7=0$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I thuộc đường thẳng (*d*) và tiếp xúc với hai mặt phẳng (P) và (Q).

• *Giả sử:* $I(t;-1;-t)\in d$. *Vì (S) tiếp xúc với (P) và (Q) nên* $d(I,(P))=d(I,(Q))=R$

$\Leftrightarrow \frac{|1-t|}{3}=\frac{|5-t|}{3}\ \Leftrightarrow t=3$. *Suy ra:* $R=\frac{2}{3}, I(3;-1;-3)$.

Vậy phương trình mặt cầu (S): $\left(x-3\right)^2+\left(y+1\right)^2+\left(z+3\right)^2=\frac{4}{9}$.

<u>*Câu hỏi tương tự:*</u>

a) $d:\{x=2+t;\ y=1+2t;\ z=1-t$, $(P):x+2y-2z+5=0$, $(Q):x+2y-2z-13=0$.

ĐS: $(S):\left(x-\frac{16}{7}\right)^2+\left(y-\frac{11}{7}\right)^2+\left(z-\frac{5}{7}\right)^2=9$

Câu 124. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng (P): $x-2y-2z+10=0$, hai đường thẳng (Δ_1): $\frac{x-2}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-1}$, ($\Delta_2$): $\frac{x-2}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z+3}{4}$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm thuộc (Δ_1), tiếp xúc với (Δ_2) và mặt phẳng (P).

• $\Delta_1:\begin{cases}x=2+t\\ y=t\\ z=1-t\end{cases}$; Δ_2 *đi qua điểm* $A(2;0;-3)$ *và có VTCP* $\vec{u}_2=(1;1;4)$.

Giả sử $I(2+t;t;1-t)\in\Delta_1$ *là tâm và R là bán kính của mặt cầu (S).*

Ta có: $\overrightarrow{AI}=(t;t;4-t) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AI},\vec{u}_2\right]=(5t-4;4-5t;0) \Rightarrow d(I,\Delta_2)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AI},\vec{u}_2\right]\right|}{\left|\vec{u}_2\right|}=\dfrac{|5t-4|}{3}$

$$d(I,(P))=\frac{|2+t-2t-2(1-t)+10|}{\sqrt{1+4+4}}=\frac{|t+10|}{3}$$

(S) tiếp xúc với Δ_2 *và (P)* $\Leftrightarrow d(I,\Delta_2)=d(I,(P)) \Leftrightarrow |5t-4|=|t+10| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{7}{2} \\ t=-1 \end{array}\right.$.

• *Với* $t=\dfrac{7}{2} \Rightarrow I\left(\dfrac{11}{2};\dfrac{7}{2};-\dfrac{5}{2}\right),\ R=\dfrac{9}{2} \Rightarrow$

PT mặt cầu (S): $\left(x-\dfrac{11}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{7}{2}\right)^2+\left(z+\dfrac{5}{2}\right)^2=\dfrac{81}{4}$.

• *Với* $t=-1 \Rightarrow I(1;-1;2), R=3 \Rightarrow$ *PT mặt cầu (S):* $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=9$.

Dạng 2: Viết phương trình mặt cầu bằng cách xác định các hệ số của phương trình

Câu 125. Trong không gian với hệ tọa độ O*xyz*, cho 3 điểm A(3;1;1), B(0;1;4), C(–1;–3;1). Lập phương trình của mặt cầu (S) đi qua A, B, C và có tâm nằm trên mặt phẳng (P): x + y – 2z + 4 = 0.

• *PT mặt cầu (S) có dạng:* $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$
(S) qua A: $6a+2b+2c-d-11=0$
(S) qua B: $2b+8c-d-17=0$
(S) qua C: $2a+6b-2c+d+11=0$
Tâm $I\in(P)$: $a+b-2c+4=0$
Giải ra ta được: $a=1, b=-1, c=2, d=-3$. *Vậy (S):* $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-3=0$

Câu 126. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho hình lăng trụ đứng *ABC.A'B'C'* có tam giác *ABC* vuông tại *A*, đỉnh *A* trùng với gốc tọa độ *O*, *B*(1; 2; 0) và tam giác *ABC* có diện tích bằng 5. Gọi *M* là trung điểm của *CC'*. Biết rằng điểm *A'*(0; 0; 2) và điểm *C* có tung độ dương. Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện *AB'C'M*.

• *Ta có:* $AB=\sqrt{5}$ *và* $S_{\Delta ABC}=5$ *nên* $AC=2\sqrt{5}$.

Vì AA' $\perp$ *(ABC) và A, B* $\in$ *(Oxy) nên C* $\in$ *(Oxy).*

Gọi $C(x;y;0)$. $\overrightarrow{AB}=(1;2;0), \overrightarrow{AC}=(x;y;0)$.

Ta có: $\begin{cases} AB\perp AC \\ AC=2\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=0 \\ x^2+y^2=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=2 \end{cases} \vee \begin{cases} x=4 \\ y=-2 \end{cases}$. *Vì* $y_C>0$ *nên C(–4; 2; 0)*.

Do $\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AA'} \Rightarrow$ *C'(–4; 2; 2),* $\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{AA'} \Rightarrow$ *B'(1; 2; 2) và M là trung điểm CC'*
nên M(–4; 2; 1).

PT mặt cầu (S) đi qua A, B', C' và M có dạng: $(S): x^2+y^2+z^2+2x+2by+2cz+d=0$

$$\begin{cases} A(0;0;0)\in(S) \\ B'(1;2;2)\in(S) \\ C'(-4;2;2)\in(S) \\ M(-4;2;1)\in(S) \end{cases} \Leftrightarrow a=\frac{3}{2}; b=-\frac{3}{2}; c=-\frac{3}{2}; d=0 \quad (\textit{thoả } a^2+b^2+c^2-d>0)$$

Vậy phương trình mặt cầu (S) là: $(S): x^2+y^2+z^2+3x-3y-3z=0$.

Câu 127. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho tứ diện ABCD với A(2; 1; 0), B(1; 1; 3), C(2;–1; 3), D(1;–1; 0). Tìm tọa độ tâm và bán kính của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD.

• *Ta tính được* $AB=CD=\sqrt{10}$, $AC=BD=\sqrt{13}$, $AD=BC=\sqrt{5}$. *Vậy tứ diện ABCD có các cặp cạnh đối đôi một bằng nhau. Từ đó ABCD là một tứ diện gần đều. Do đó tâm của mặt cầu ngoại tiếp của tứ diện là trọng tâm G của tứ diện này.*

Vậy mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD có tâm là $G\left(\frac{3}{2};0;\frac{3}{2}\right)$, *bán kính là* $R=GA=\frac{\sqrt{14}}{2}$.

Cách khác: Ta có thể xác định toạ độ tâm I của mặt cầu thoả điều kiện: IA = IB = IC = ID

.

Câu 128. Trong không gian với hệ trục toạ độ Oxyz, cho mặt phẳng (P): $x+2y+2z-6=0$, gọi A, B, C lần lượt là giao điểm của (P) với các trục tọa độ Ox, Oy, Oz. Viết phương trình mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện OABC, tìm tọa độ tâm và bán kính của đường tròn (C) là giao tuyến của (P) và (S).

• *Ta có: A(6;0;0), B(0;3;0), C(0;0;3).*

PT mặt cầu (S) có dạng: $x^2+y^2+z^2+2Ax+2By+2Cz+D=0 \ (A^2+B^2+C^2-D>0)$.

$$A, B, C, O \in (S) \Leftrightarrow \begin{cases} D=0 \\ 36+12A=0 \\ 9+6B=0 \\ 9+6C=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left\{ A=-3;\ B=-\frac{3}{2};\ C=-\frac{3}{2};\ D=0 \right.$$

Vậy (S): $x^2+y^2+z^2-6x-3y-3z=0$ *có tâm* $I\left(3;\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$, *bán kính* $R=\frac{3\sqrt{6}}{2}$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên (P) $\Rightarrow$ *H là tâm của (C). Tìm được* $H\left(\frac{8}{3};\frac{5}{6};\frac{5}{6}\right)$.

$\Rightarrow$ *Bán kính của (C):* $r=\sqrt{R^2-IH^2}=\sqrt{\frac{27}{2}-1}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

Câu 129. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng 2. Gọi M là trung điểm của đoạn AD, N là tâm hình vuông CC'D'D. Tính bán kính mặt cầu đi qua các điểm B, C', M, N.

• *Chọn hệ trục toạ độ Oxyz sao cho:* $D\equiv O(0;0;0)$, *A(2; 0; 0), D′(0; 2; 0), C(0; 0; 2).*
Suy ra: M(1; 0; 0), N(0; 1; 1), B(2; 0; 2), C′(0; 2; 2).

PT mặt cầu (S) đi qua 4 điểm M, N, B, C′ có dạng: $x^2+y^2+z^2+2Ax+2By+2Cz+D=0$.

$$M, N, B, C' \in (S) \Leftrightarrow \begin{cases} 1+2A+D=0 \\ 2+2B+2C+D=0 \\ 8+4A+4C+D=0 \\ 8+4B+4C+D=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left\{ A=-\frac{5}{2}; B=-\frac{5}{2}; C=-\frac{1}{2}; D=4 \right.$$

Vậy bán kính $R=\sqrt{A^2+B^2+C^2-D}=\sqrt{15}$.

Dạng 3: Các bài toán liên quan đến mặt cầu

Câu 130. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng (P): 2x – 2y – z – 4 = 0 và mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 11 = 0$. Chứng minh rằng mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn. Xác định tọa độ tâm và tính bán kính của đường tròn đó.

• *I (1; 2; 3); R =* $\sqrt{1+4+9+11}=5$ *; d (I; (P)) =* $\dfrac{|2(1)-2(2)-3-4|}{\sqrt{4+4+1}}=3$ *< R = 5.*

Vậy (P) cắt (S) theo đường tròn (C)

Phương trình d qua I, vuông góc với (P) : $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2-2t \\ z=3-t \end{cases}$

Gọi J là tâm, r là bán kính đường tròn (C). J ∈ d ⇒ J (1 + 2t; 2 – 2t; 3 – t)

J ∈ (P) ⇒ 2(1 + 2t) – 2(2 – 2t) – 3 + t – 4 = 0 ⇒ t = 1

Vậy tâm đường tròn là J (3; 0; 2) , bán kính r = $\sqrt{R^2 - IJ^2} = 4$

Câu 131. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho A(2; 0; 0), B(0; 2; 0), C(0; 0; 2). Tính bán kính mặt cầu nội tiếp tứ diện OABC.

• *Gọi I , r là tâm và bán kính của mặt cầu nội tiếp tứ diện OABC.*

$V_{OABC} = V_{IOAB}+V_{IOBC}+V_{OCA}+V_{ABC} = \frac{1}{3}.r.S_{OAB}+\frac{1}{3}.r.S_{OBC}+\frac{1}{3}.r.S_{OCA}+\frac{1}{3}.r.S_{ABC} = \frac{1}{3}.r.S_{TP}$

Mặt khác: $V_{OABC} = \frac{1}{6}.OA.OB.OC = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$ *(đvtt);* $S_{OAB} = S_{OBC} = S_{OCA} = \frac{1}{2}.OA.OB = 2$

$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}AB^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}.8 = 2\sqrt{3}$ *(đvdt)* $\Rightarrow$ $S_{TP} = 6+2\sqrt{3}$ *(đvdt)*

Do đó: $r = \dfrac{3V_{OABC}}{S_{TP}} = \dfrac{4}{6+2\sqrt{3}}$ *(đv độ dài)*

Câu 132. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho hai điểm S(0;0;1), A(1;1;0). Hai điểm M(*m*; 0; 0), N(0; *n*; 0) thay đổi sao cho $m+n=1$ và $m > 0$, $n > 0$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SMN). Từ đó suy ra mặt phẳng (SMN) tiếp xúc với một mặt cầu cố định.

• *Ta có:* $\overrightarrow{SM} = (m;0;-1)$, $\overrightarrow{SN} = (0;n;-1)$ ⇒ *VTPT của (SMN) là* $\vec{n} = (n;m;mn)$

Phương trình mặt phẳng (SMN): $nx + my + mnz - mn = 0$

Ta có: d(A,(SMN)) $= \dfrac{|n+m-mn|}{\sqrt{n^2+m^2+m^2n^2}} = \dfrac{|1-m.n|}{\sqrt{1-2mn+m^2n^2}} = \left|\dfrac{1-mn}{1-mn}\right| = 1$

Suy ra (SMN) tiếp xúc mặt cầu tâm A bán kính R=1 cố định.

Câu 133. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng có phương trình $d_1: \begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=2-t \end{cases}$, $d_2: \begin{cases} x=0 \\ y=t \\ z=2-t \end{cases}$. Viết phương trình mặt cầu (S) bán kính $R=\sqrt{6}$, có tâm nằm trên đường phân giác của góc nhỏ tạo bởi d_1, d_2 và tiếp xúc với d_1, d_2.

• *Phương trình mp(P) chứa* d_1, d_2 *là* $(P): x+y+z-2=0$

Phương trình mp(Q) chứa d_1 *và vuông góc với (P là* $(Q): x-2y+z-2=0$

Phương trình mp(R) chứa d_2 *và vuông góc với (P) là* $(R): 2x-y-z+2=0$

Phương trình hai mặt phân giác của hai mặt (Q) và (R):

$(PG_1): x-y=0,\ (PG_2): x+y-2z+4=0$

Phương trình hai đường phân giác của d_1, d_2: $a:\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=2-2t \end{cases}$ $\quad b:\begin{cases} x=-t \\ y=t \\ z=2 \end{cases}$

Vì $\cos(a,d_1) > \cos(b,d_1)$ *nên đường thẳng a là phân giác của* d_1, d_2 *thỏa mãn điều kiện.*

Do đó có hai tâm mặt cầu thỏa mãn $I_1(2;2;-2),\ \mathrm{I}_2(-2;-2;6)$

Suy ra $(S_1):(x-2)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=6$ *hoặc* $(S_2):(x+2)^2+(y+2)^2+(z-6)^2=6$

TĐKG 04: TÌM ĐIỂM THOẢ ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

Dạng 1: Xác định điểm thuộc mặt phẳng

Câu 134. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho hai điểm A(1;2;3) và B(3;4;1). Tìm toạ độ điểm M thuộc mặt phẳng (P): $x-y+z-1=0$ để ΔMAB là tam giác đều.

• *Gọi (Q) là mặt phẳng trung trực của đoạn AB* $\Rightarrow$ *(Q):* $x+y-z-3=0$

d là giao tuyến của (P) và (Q) $\Rightarrow$ *d:* $\{x=2; y=t+1; z=t$

$M\in d \Rightarrow M(2;t+1;t) \Rightarrow AM=\sqrt{2t^2-8t+11}$.

Vì $AB=\sqrt{12}$ *nên* ΔMAB *đều khi* $MA=MB=AB$

$\Leftrightarrow 2t^2-8t-1=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{4\pm\sqrt{18}}{2} \quad \Rightarrow M\left(2;\dfrac{6\pm\sqrt{18}}{2};\dfrac{4\pm\sqrt{18}}{2}\right)$.

<u>Câu hỏi tương tự</u>:

a) Với $A(4;0;0)$, $B(0;0;4)$, *(P):* $2x-y+2z-4=0$. *ĐS:*

Câu 135. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho hai điểm A(0; 0;–3) và B(2; 0;–1). Tìm toạ độ điểm M thuộc mặt phẳng (P): $3x-y-z+1=0$ để ΔMAB là tam giác đều.

• *Giả sử* $M(x;y;z)\in(P) \Rightarrow 3x-y-z+1=0$ *(1).*

$$\Delta MAB \text{ đều} \Leftrightarrow \begin{cases} MA^2=MB^2 \\ MA^2=AB^2 \\ M\in(P)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4x+8z=-4 \\ 6z=-1 \\ 3x-y-z=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2}{3} \\ y=\dfrac{10}{3} \\ z=-\dfrac{1}{6}\end{cases} \Rightarrow M\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{10}{3};-\dfrac{1}{6}\right)$$

<u>Câu hỏi tương tự</u>:

a) Với $A(1;1;-3), B(3;1;-1), (P): 3x-8y+7z+4=0$.

ĐS: $C\left(2+\dfrac{2\sqrt{6}}{3};1-\dfrac{\sqrt{6}}{3};-2-\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right)$ *hoặc* $C\left(2-\dfrac{2\sqrt{6}}{3};1+\dfrac{\sqrt{6}}{3};-2+\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right)$

b) Với $A(1;2;3), B(-1;4;2), (P): x-y+z+1=0$.

ĐS: $C\left(\dfrac{1-3\sqrt{5}}{4};\dfrac{11-3\sqrt{5}}{4};\dfrac{3}{2}\right)$ *hoặc* $C\left(\dfrac{1+3\sqrt{5}}{4};\dfrac{11+3\sqrt{5}}{4};\dfrac{3}{2}\right)$

Câu 136. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho hai điểm $A(3;5;4)$, $B(3;1;4)$. Tìm tọa độ điểm *C* thuộc mặt phẳng $(P): x-y-z-1=0$ sao cho tam giác *ABC* cân tại *C* và có diện tích bằng $2\sqrt{17}$.

• *Giả sử:* $C(x;y;x-y-1)\in(P)$. $AB=4$.

$AC=BC \Rightarrow \sqrt{(x-3)^2+(y-5)^2+(x-y-5)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2+(x-y-5)^2} \Rightarrow y=3$

Gọi I là trung điểm AB $\Rightarrow I(3;3;4)$.

$S_{IAB}=2\sqrt{17} \Rightarrow CI.AB=4\sqrt{17} \Rightarrow CI=\sqrt{17} \Leftrightarrow \sqrt{(3-x)^2+(8-x)^2}=\sqrt{17} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=7\end{array}\right.$

\+ *Với* $x=4 \Rightarrow C(4;3;0)$ \+ $x=7 \Rightarrow C(7;3;3)$.

Câu 137. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho ba điểm *A*(0; 1; 2), *B*(2; –2; 1), *C*(–2; 0; 1). Viết phương trình mặt phẳng (*ABC*) và tìm điểm *M* thuộc mặt phẳng (P): $2x+2y+z-3=0$

sao cho $MA = MB = MC$.

• *Ta có* $\overrightarrow{AB} = (2;-3;-1), \overrightarrow{AC} = (-2;-1;-1) \Rightarrow \vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (2;4;-8)$ *là 1 VTPT của (ABC)*

Suy ra phương trình (ABC): $x + 2y - 4z + 6 = 0$. *Giả sử M(x; y; z).*

Ta có: $\begin{cases} MA = MB = MC \\ M \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = -7 \end{cases} \Rightarrow M(2;3;-7)$

Câu 138. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;-2;1)$, $B(2;0;3)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y - z + 4 = 0$. Tìm điểm M thuộc (P) sao cho $MA = MB$ và $(ABM) \perp (P)$.

• *Gọi (Q) là mặt phẳng trung trực của AB* $\Rightarrow \vec{n}_Q = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (1;1;1)$ *là một VTPT của (Q).*

$I(1;-1;2)$ *là trung điểm của AB* $\Rightarrow$ *Phương trình* $(Q): x + y + z - 2 = 0$

Gọi (R) là mặt phẳng qua A, B và vuông góc với (P). $\vec{n}_R = \left[\vec{n}_P; \vec{n}_Q\right] = (0;3;-3)$ *là VTPT của (R)* $\Rightarrow$ *Phương trình của* $(R): y - z + 3 = 0$

Toạ độ của M là nghiệm cuả hệ: $\begin{cases} 2x - y - z + 4 = 0 \\ x + y + z - 2 = 0 \\ y - z + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow M\left(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{6}; \frac{17}{6}\right)$

Câu 139. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho ba điểm A(2;0;0), C(0;4;0), S(0; 0; 4).Tìm tọa độ điểm B trong mp(Oxy) sao cho tứ giác OABC là hình chữ nhật. Viết phương trình mặt cầu đi qua bốn điểm O, B, C, S.

• *OABC là hình chữ nhật ⇒ B(2; 4; 0) ⇒ Tọa độ trung điểm H của OB là H(1; 2; 0), H chính là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông OCB.*

+ Đường thẳng vuông góc với mp(OCB) tại H cắt mặt phẳng trung trực của đoạn OS (mp có phương trình z = 2) tại I ⇒ I là tâm mặt cầu đi qua 4 điểm O, B, C, S.

+ Tâm I(1; 2; 2) và R = OI = $\sqrt{1 + 2^2 + 2^2} = 3$ $\Rightarrow$ *(S):* $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 9$

Câu 140. Trong không gian Oxyz cho hai điểm $A(-1;3;-2)$, $B(-3;7;-18)$ và mặt phẳng (P): $2x - y + z + 1 = 0$. Tìm tọa độ điểm M ∈ (P) sao cho MA + MB nhỏ nhất.

• *A, B nằm cùng phía đối với (P). Gọi A′ là điểm đối xứng với A qua (P)* $\Rightarrow A'(3;1;0)$

Để M ∈ (P) có MA + MB nhỏ nhất thì M là giao điểm của (P) với A′B $\Rightarrow M(2;2;-3)$.

<u>Câu hỏi tương tự</u>:

a) *Với* $A(0;-1;2), B(-1;1;3)$, $(P) \equiv (Oxy)$. *ĐS:* $M\left(-\frac{2}{5}; -\frac{1}{5}; 0\right)$

b) *Với* $A(1;0;0)$, $B(1;2;0)$, $(P): x + y + z - 4 = 0$ *ĐS:*

c) *Với* $A(1;2;-1), B(3;1;-2), (P): x - y + 2z = 0$. *ĐS:* $M\left(\frac{13}{5}; 1; -\frac{4}{5}\right)$.

Câu 141. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm A(1;5;0), B(3;3;6) và đường thẳng Δ có phương trình tham số $\{x = -1 + 2t;\ y = 1 - t;\ z = 2t$. Một điểm M thay đổi trên đường thẳng Δ, xác định vị trí của điểm M để chu vi tam giác MAB đạt giá trị nhỏ nhất.

• *Gọi P là chu vi của tam giác MAB thì P = AB + AM + BM.*

Vì AB không đổi nên P nhỏ nhất khi và chỉ khi AM + BM nhỏ nhất.

Điểm $M \in \Delta$ *nên* $M\left(-1 + 2t; 1 - t; 2t\right)$. $AM + BM = \sqrt{(3t)^2 + (2\sqrt{5})^2} + \sqrt{(3t-6)^2 + (2\sqrt{5})^2}$

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, ta xét hai vectơ $\vec{u}=\left(3t;2\sqrt{5}\right)$ *và* $\vec{v}=\left(-3t+6;2\sqrt{5}\right)$.

Ta có $|\vec{u}|=\sqrt{(3t)^2+(2\sqrt{5})^2}$; $|\vec{v}|=\sqrt{(3t-6)^2+(2\sqrt{5})^2}$

$\Rightarrow AM+BM=|\vec{u}|+|\vec{v}|$ *và* $\vec{u}+\vec{v}=(6;4\sqrt{5})\Rightarrow|\vec{u}+\vec{v}|=2\sqrt{29}$

Mặt khác, ta luôn có $|\vec{u}|+|\vec{v}|\ge|\vec{u}+\vec{v}|$ *Như vậy* $AM+BM\ge 2\sqrt{29}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\vec{u},\vec{v}$ *cùng hướng* $\Leftrightarrow \dfrac{3t}{-3t+6}=\dfrac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\Leftrightarrow t=1$

$\Rightarrow M(1;0;2)$ *và* $\min(AM+BM)=2\sqrt{29}$. *Vậy khi M(1;0;2) thì minP =* $2(\sqrt{11}+\sqrt{29})$

Câu 142. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng $(P): x-3y+3z-11=0$ và hai điểm $A(3;-4;5)$, $B(3;3;-3)$. Tìm điểm $M\in(P)$ sao cho $|MA-MB|$ lớn nhất.

• *Xét tương tự như câu 6).*
+ Nếu A, B ở cùng phía so với (P) thì $|MA-MB|\le AB$
+ Nếu A, B ở khác phía so với (P), ta lấy điểm A' *đối xứng với A qua (P).*
Khi đó $MA'=MA\Rightarrow|MA-MB|=|MA'-MB|\le A'B$
ĐS: $M\left(-\dfrac{31}{7};-\dfrac{5}{7};\dfrac{31}{7}\right)$.

Câu hỏi tương tự:

a) $(P): x+y+z-4=0$, $A(1;2;1)$, $B(0;1;2)$. *ĐS:*

b) $(P): x-y+2z=0, A(1;2;-1), C(1;-2;1)$. *ĐS:* $M\left(\dfrac{7}{2};\dfrac{11}{2};1\right)$

Câu 143. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho mặt phẳng (P): $x-2y+2z+8=0$ và các điểm $A(-1;2;3), B(3;0;-1)$. Tìm điểm M$\in$ (P) sao cho MA^2+MB^2 nhỏ nhất.

• *Gọi I là trung điểm của AB* $\Rightarrow I(1;\ 1;\ 1)$. *Ta có:* $MA^2+MB^2=2MI^2+\dfrac{AB^2}{2}$.

Do đó: MA^2+MB^2 *nhỏ nhất* $\Leftrightarrow IM^2$ *nhỏ nhất* $\Leftrightarrow$ *M là hình chiếu vuông góc của I trên (P)*

$\Leftrightarrow \begin{cases}\overrightarrow{IM},\vec{n}_P \text{ cùng phương}\\ M\in(P)\end{cases} \Leftrightarrow\Leftrightarrow \begin{cases}x=1+t\\ y=1-2t\\ z=1+2t\\ x-2y+2z+8=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t=-1\\ x=0\\ y=3\\ z=-1\end{cases}$. *Vậy M(0; 3; –1).*

Câu hỏi tương tự:

a) Với (P): $x+y+z=0$, *A(–3; 5;–5); B(5;–3; 7).* *ĐS: M ≡ O(0; 0; 0).*

b) Với (P): $x+5y-7z-5=0$, $A(4;9;-9), B(-10;13;1)$. *ĐS:* $M\left(-\dfrac{50}{17};-\dfrac{192}{17};\dfrac{75}{17}\right)$.

Câu 144. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng $(P): x+y+z-4=0$ và các điểm $A(1;2;1)$, $B(0;1;2)$. Tìm điểm $M\in(P)$ sao cho MA^2+2MB^2 nhỏ nhất.

• *Giả sử I là điểm thoả mãn:* $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{IA}=-2\overrightarrow{IB}\ \Rightarrow I\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{4}{3};\dfrac{5}{3}\right)$

Ta có: $MA^2+2MB^2=3MI^2+IA^2+2IB^2$. *Do I cố định nên* IA^2, IB^2 *không đổi.*

Vậy MA^2+2MB^2 *nhỏ nhất* $\Leftrightarrow MI^2$ *nhỏ nhất* $\Leftrightarrow MI$ *nhỏ nhất* $\Leftrightarrow M$ *là hình chiếu của I* *trên (P)* $\Leftrightarrow M\left(\frac{5}{9};\frac{14}{9};\frac{17}{9}\right)$.

Câu 145. Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz,* cho tam giác *ABC* với *A*(1; 2; 5), *B*(1; 4; 3), *C*(5; 2; 1) và mặt phẳng (*P*): $x-y-z-3=0$. Gọi *M* là một điểm thay đổi trên mặt phẳng (*P*). Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F=MA^2+MB^2+MC^2$. Khi đó tìm toạ độ của M.

• *Gọi G là trọng tâm của ΔABC* $\Rightarrow G\left(\frac{7}{3};\frac{8}{3};3\right)$; $GA^2+GB^2+GC^2=\frac{56}{9}+\frac{32}{9}+\frac{104}{9}=\frac{64}{3}$

Ta có $F=MA^2+MB^2+MC^2=\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right)^2$

$=3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2+2\overrightarrow{MG}(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})=3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2$

F nhỏ nhất $\Leftrightarrow MG^2$ *nhỏ nhất* $\Leftrightarrow$ *M là hình chiếu của G lên (P)*

$$\Leftrightarrow MG=d(G,(P))=\frac{\left|\frac{7}{3}-\frac{8}{3}-3-3\right|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{19}{3\sqrt{3}}$$

Vậy F nhỏ nhất bằng $3.\left(\frac{19}{3\sqrt{3}}\right)^2+\frac{64}{3}=\frac{553}{9}$ *khi M là hình chiếu của G lên (P).*

Câu hỏi tương tự:

a) *A(1; –3; 5), B(1; 4; 3), C(4; 2; 1), (P):* $x-y-z-3=0$.

ĐS: $\min F=65$, $M\left(\frac{11}{3};\frac{-2}{3};\frac{4}{3}\right)$

b) *A(1; 1; 0), B(0; 1; 1) và C(2; 2; 1), (P):* $x+3y-z+2=0$. *ĐS:* $M\left(\frac{22}{3};\frac{61}{3};-\frac{17}{3}\right)$

c) *A(–1; 2; 3), B(3; 0; –1), C(1; 4; 7), (P):* $x-2y+2z+6=0$. *ĐS: M (0; 4; 1)* .

Câu 146. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho các điểm $A(-1;0;1)$, $B(2;-1;0)$, $C(2;4;2)$ và mặt phẳng (P): $x+y+2z+2=0$. Tìm toạ độ điểm M thuộc (P) sao cho biểu thức $T=MA^2+MB^2+MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

• *Giả sử* $M(x;y;z)\in(P)\Rightarrow x+y+2z+2=0\Leftrightarrow(x-1)+(y-1)+2(z-1)+6=0$ *(1)*

Ta có: $T=3(x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z)+31=3\left[(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\right]+22$ *(2)*

Từ (1), áp dụng BĐT Bunhiacốpxki cho các bộ số: $(1;1;2)$ *và* $(x-1;y-1;z-1)$, *ta được:*

$$(-6)^2=\left[1(x-1)+1(y-1)+2(z-1)\right]^2\le(1+1+4)\left[(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\right]$$

$\Rightarrow T\ge3.\frac{6^2}{6}+22=40$. *Dấu "=" xảy ra* $\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}\\x+y+2z+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=0\\z=-1\end{cases}\Rightarrow M(0;0;-1)$.

Câu 147. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng $(P):x+y+z-4=0$ và các điểm $A(1;2;1)$, $B(0;1;2)$, $C(0;0;3)$. Tìm điểm $M\in(P)$ sao cho $MA^2+3MB^2+2MC^2$ nhỏ nhất.

• *Giải tương tự như Câu 10.*

Câu 148. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng $(P):x-y+z-1=0$ và các điểm $A(1;2;-1)$, $B(1;0;-1)$, $C(2;1;-2)$. Tìm điểm $M \in (P)$ sao cho $MA^2 + MB^2 - MC^2$ nhỏ nhất.

• *Giải tương tự như Câu 10.* *ĐS:* $M\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$.

Câu 149. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng $(P): x - y + 2z = 0$ và các điểm $A(1;2;-1)$, $B(3;1;-2)$, $C(1;-2;1)$. Tìm điểm $M \in (P)$ sao cho $MA^2 - MB^2 - MC^2$ nhỏ nhất.

• *Giải tương tự như Câu 10.* *ĐS:* $M(2;-2;-2)$.

Câu 150. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho 3 điểm A(3; 1; 1), B(7; 3; 9), C(2; 2; 2) và mặt phẳng (P) có phương trình: $x + y + z - 3 = 0$. Tìm trên (P) điểm M sao cho $\left|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất.

• *Gọi I là điểm thoả:* $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Rightarrow I\left(\frac{23}{6};\frac{13}{6};\frac{25}{6}\right)$

Ta có: $T = \left|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\right| = \left|\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right) + 2\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right) + 3\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}\right)\right| = \left|6\overrightarrow{MI}\right| = 6\left|\overrightarrow{MI}\right|$

Do đó: T nhỏ nhất $\Leftrightarrow \left|\overrightarrow{MI}\right|$ *nhỏ nhất* $\Leftrightarrow$ *M là hình chiếu của I trên (P). Ta tìm được:* $M\left(\frac{13}{9};-\frac{2}{9};\frac{16}{9}\right)$. *Khi đó* $\min T = \frac{43\sqrt{3}}{3}$.

<u>Cách 2</u>: Giả sử $M(x;y;z) \in (P) \Rightarrow x + y + z - 3 = 0 \quad (1)$

Khi đó: $MI^2 = \left(x - \frac{23}{6}\right)^2 + \left(y - \frac{13}{6}\right)^2 + \left(z - \frac{25}{6}\right)^2$

Áp dụng BĐT Bunhiacốpxki cho (1), ta được:

$$\left(-\frac{43}{6}\right)^2 = \left[1.\left(x - \frac{23}{6}\right) + 1.\left(y - \frac{13}{6}\right) + 1.\left(z - \frac{25}{6}\right)\right]^2 \le 3\left[\left(x - \frac{23}{6}\right)^2 + \left(y - \frac{13}{6}\right)^2 + \left(z - \frac{25}{6}\right)^2\right]$$

$$\Rightarrow MI^2 \ge 3\left(\frac{43}{18}\right)^2 \Leftrightarrow MI \ge \frac{43\sqrt{3}}{18}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x - \frac{23}{6}}{1} = \dfrac{y - \frac{13}{6}}{1} = \dfrac{z - \frac{25}{6}}{1} \\ x + y + z - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{13}{9} \\ y = -\frac{2}{9} \\ z = \frac{16}{9} \end{cases} \Leftrightarrow M\left(\frac{13}{9};-\frac{2}{9};\frac{16}{9}\right)$

Vậy $\min T = \frac{43\sqrt{3}}{3}$ *khi* $M\left(\frac{13}{9};-\frac{2}{9};\frac{16}{9}\right)$.

Câu 151. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng $(P): x + y + z - 4 = 0$ và các điểm $A(1;2;1)$, $B(0;1;2)$, $C(0;0;3)$. Tìm điểm $M \in (P)$ sao cho $\left|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất.

• *Giải tương tự như Câu 16.*

Câu 152. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y + z - 1 = 0$ và ba điểm $A(2;1;3), B(0;-6;2), C(1;-1;4)$. Tìm tọa độ điểm M trên mặt phẳng (P) sao cho

$\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị bé nhất.

• *Dễ thấy* A,B,C *không thẳng hàng. Gọi* G *là trọng tâm tam giác* ABC*, thì* $G(1;-2;3)$.
Khi đó với mọi $M\in(P)$ *ta có* $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$*, do đó* $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ *đạt giá trị bé nhất* $\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{MG}\right|$ *đạt giá trị bé nhất* $\Leftrightarrow M$ *là hình chiếu vuông góc của* G *trên* (P).
(P) có VTPT $\vec{n}=(1;1;1)$. *Giả sử* $M(x_0;y_0;z_0)\in(P)\Rightarrow x_0+y_0+z_0-1=0$ *(1).*
M *là hình chiếu của* G *trên* (P) $\Leftrightarrow\overrightarrow{GM}=\left(x_0-1;y_0+2;z_0-3\right)$ *cùng phương với* $\vec{n}$

$$\Leftrightarrow\frac{x_0-1}{1}=\frac{y_0+2}{1}=\frac{z_0-3}{1}=\frac{(x_0-1)+(y_0+2)+(z_0-3)}{1+1+1}=\frac{(x_0+y_0+z_0-1)-1}{3}=\frac{-1}{3}$$

$$\Leftrightarrow x_0=\frac{2}{3},y_0=\frac{-7}{3},z_0=\frac{8}{3}.$$ *Vậy* $M\left(\frac{2}{3};\frac{-7}{3};\frac{8}{3}\right)$.

<u>Câu hỏi tương tự</u>:

a) $(P):x-y+2z=0,A(1;2;-1),B(3;1;-2),C(1;-2;1)$. *ĐS:* $M\left(\frac{5}{2};\frac{1}{3};-\frac{2}{3}\right)$.

Câu 153. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng (P): $3x-3y+2z+37=0$ và các điểm $A(4;1;5),B(3;0;1),C(-1;2;0)$. Tìm toạ độ điểm M thuộc (P) sao cho biểu thức sau đạt giá trị nhỏ nhất: S = $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}$

• *Giả sử* $M(x;y;z)\in(P)\Rightarrow 3x-3y+2z+37=0$ *(1)*
Khi đó $S=3\left[(x-2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2-5\right]$.
Áp dụng BĐT Bunhiacốpxki cho (1) ta được:

$$(-44)^2=\left[3(x-2)-3(y-1)+2(z-2)\right]^2\le(9+9+4)\left[(x-2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2\right]$$

$$\Rightarrow(x-2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2\ge\frac{44^2}{22}=88.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-2}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-4\\y=7\\z=-2\end{cases}\Leftrightarrow M(4;7;-2)$.

Vậy $\min S=3.88-5=259$ *khi* $M(4;7;-2)$.

Câu 154. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho các điểm $A(0;1;2),B(-1;1;0)$ và mặt phẳng (P): $x-y+z=0$. Tìm toạ độ điểm M thuộc (P) sao cho ΔMAB vuông cân tại B.

• *Giả sử* $M(x;y;z)\in(P)$. $\overrightarrow{BA}=(1;0;2),\overrightarrow{MB}=(x+1;y-1;z)$.

Ta có: $$\begin{cases}M\in(P)\\\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BM}=0\\BA=BM\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+1+2z=0\\x-y+z=0\\(x+1)^2+(y-1)^2+z^2=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{-1-\sqrt{10}}{3}\\y=\frac{-4+\sqrt{10}}{6}\\z=\frac{-2-\sqrt{10}}{6}\end{cases}\vee\begin{cases}x=\frac{-4+\sqrt{10}}{3}\\y=\frac{-2+\sqrt{10}}{6}\\z=\frac{-2+\sqrt{10}}{6}\end{cases}$$

Câu 155. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho các điểm $B(-1;\sqrt{3};0)$, $C(1;\sqrt{3};0)$, $M(0;0;a)$ với $a>0$. Trên trục Oz lấy điểm N sao cho mặt phẳng (NBC) vuông góc với mặt phẳng (MBC). Tìm a để thể tích của khối chóp BCMN nhỏ nhất

• $V_{BCMN}=V_{MOBC}+V_{NOBC}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\left(a+\dfrac{3}{a}\right)$ *đạt nhỏ nhất* $\Leftrightarrow a=\dfrac{3}{a}\Leftrightarrow a=\sqrt{3}$.

Dạng 2: Xác định điểm thuộc đường thẳng

Câu 156. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=-2t\\y=t\\z=-1-2t\end{cases}$ và mặt phẳng (P): $x+y-z+1=0$. Gọi d' là hình chiếu của d trên mặt phẳng (P). Tìm toạ độ điểm H thuộc d' sao cho H cách điểm $K(1;1;4)$ một khoảng bằng 5.

• *Gọi* $A=d\cap(P)\Rightarrow A(4;-2;3)$. *PT hình chiếu* d' *của d trên (P):* $\begin{cases}x=4+7t\\y=-2-2t\\z=3+5t\end{cases}$.

Giả sử $H(4+7t;-2-2t;3+5t)\in d'$. $KH^2=25\Leftrightarrow t=\dfrac{-11\pm\sqrt{238}}{39}\Rightarrow H.$

Câu 157. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho hai điểm A(1; 4; 2),B(–1; 2; 4) và đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z}{2}$. Tìm toạ độ điểm M trên Δ sao cho: $MA^2+MB^2=28$.

• *PTTS của* $\Delta:\begin{cases}x=1-t\\y=-2+t\\z=2t\end{cases}$. $M\in\Delta\Rightarrow M(1-t;-2+t;2t)$

Ta có: $MA^2+MB^2=28\Leftrightarrow 12t^2-48t+48=0\Leftrightarrow t=2\Rightarrow M(-1;0;4)$

Câu 158. Trong không gian toạ độ *Oxyz*, cho các điểm $A(0;1;0),B(2;2;2),C(-2;3;1)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-3}{2}$. Tìm điểm M trên d để thể tích tứ diện MABC bằng 3.

• $d:\begin{cases}x=1+2t\\y=-2-t\\z=3+2t\end{cases}$. *Giả sử* $M(1+2t;\,-2-t;\,3+2t)\in d$. $\vec{n}=-\dfrac{1}{3}\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]=(1;\,2;\,-2)$

$\Rightarrow S_{ABC}=\dfrac{9}{2}$. *PT mặt phẳng (ABC):* $x+2y-2z-2=0$. $h=d(M,(ABC)=\dfrac{|-4t-11|}{3}$

$V_{MABC}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{9}{2}.\dfrac{|4t+11|}{3}=3\Leftrightarrow t=-\dfrac{5}{4}$ *hoặc* $t=-\dfrac{17}{4}$

$\Rightarrow M\left(-\dfrac{3}{2};-\dfrac{3}{4};\dfrac{1}{2}\right)$ *hoặc* $M\left(-\dfrac{15}{2};\dfrac{9}{4};-\dfrac{11}{2}\right)$.

Câu 159. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho điểm M(2; 1; 2) và đường thẳng *d*: $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-3}{1}$. Tìm trên *d* hai điểm A, B sao cho tam giác ABM đều.

• *Gọi H là hình chiếu của M trên d. Ta có: MH =* $d(M,d)=\sqrt{2}$.

Tam giác ABM đều, nhận MH làm đường cao nên: MA = MB = AB = $\frac{2MH}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$

Do đó, toạ độ của A, B là nghiệm của hệ: $\begin{cases}\frac{x-2}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-3}{1}\\(x-2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=\frac{8}{3}\end{cases}$.

Giải hệ này ta tìm được: $A\left(2+\frac{\sqrt{2}}{3};\frac{\sqrt{2}}{3};3+\frac{\sqrt{2}}{3}\right),\ B\left(2-\frac{\sqrt{2}}{3};-\frac{\sqrt{2}}{3};3-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$.

<u>Câu hỏi tương tự</u>:

a) Với $M(1;0;-1)$, $d:\begin{cases}x=t\\y=2t\\z=1\end{cases}$. *ĐS:* $A\left(\frac{5+\sqrt{76}}{15};\frac{10+2\sqrt{76}}{15};1\right),B\left(\frac{1-\sqrt{76}}{15};\frac{2-2\sqrt{76}}{15};1\right)$

hoặc $A\left(\frac{5-\sqrt{76}}{15};\frac{10-2\sqrt{76}}{15};1\right),B\left(\frac{1+\sqrt{76}}{15};\frac{2+2\sqrt{76}}{15};1\right)$

Câu 160. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho điểm A(0; 1; 3) và đường thẳng *d*: $\begin{cases}x=1-t\\y=2+2t\\z=3\end{cases}$. Tìm trên *d* hai điểm B, C sao cho tam giác ABC đều.

• *d có VTCP* $\vec{u}_d=(-1;2;0)$. *Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên d.*

Giả sử $H(1-t;\ 2+2t;3)\Rightarrow\overrightarrow{AH}=(1-t;1+2t;0)$

Mà AH $\perp$ *d nên* $\overrightarrow{AH}\perp\vec{u}_d\Rightarrow -1(1-t)+2(1+2t)=0\Leftrightarrow t=-\frac{1}{5}\Rightarrow H\left(\frac{6}{5};\frac{8}{5};3\right)$

$\Rightarrow AH=\frac{3\sqrt{5}}{5}$. *Mà ΔABC đều nên BC =* $\frac{2AH}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{15}}{5}$ *hay BH =* $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

Giả sử $B(1-s;2+2s;3)$ *thì* $\left(-\frac{1}{5}-s\right)^2+\left(\frac{2}{5}+2s\right)^2=\frac{15}{25}$

$\Leftrightarrow 25s^2+10s-2=0\Leftrightarrow s=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{5}$

Vậy: $B\left(\frac{6-\sqrt{3}}{5};\frac{8+2\sqrt{3}}{5};3\right)$ *và* $C\left(\frac{6+\sqrt{3}}{5};\frac{8-2\sqrt{3}}{5};3\right)$

hoặc $B\left(\frac{6+\sqrt{3}}{5};\frac{8-2\sqrt{3}}{5};3\right)$ *và* $C\left(\frac{6-\sqrt{3}}{5};\frac{8+2\sqrt{3}}{5};3\right)$

Câu 161. Trong không gian với hệ toạ *Oxyz*, tìm trên Ox điểm A cách đều đường thẳng (d) : $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+2}{2}$ và mặt phẳng (P) : $2x-y-2z=0$.

• *Gọi A(a; 0; 0)* $\in Ox \Rightarrow d(A;(P)) = \dfrac{|2a|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}} = \dfrac{|2a|}{3}$; $d(A;d) = \dfrac{\sqrt{8a^2-24a+36}}{3}$

d(A; (P)) = d(A; d) $\Leftrightarrow \dfrac{|2a|}{3} = \dfrac{\sqrt{8a^2-24a+36}}{3} \Leftrightarrow 4a^2-24a+36=0$

$\Leftrightarrow 4(a-3)^2=0 \Leftrightarrow a=3$. *Vậy có một điểm A(3; 0; 0).*

Câu 162. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng (P): $x-2y+2z-1=0$ và hai đường thẳng Δ_1 : $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+9}{6}$; Δ_2 : $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+1}{-2}$. Xác định tọa độ điểm M thuộc đường thẳng Δ_1 sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng Δ_2 và khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) bằng nhau.

• *M (–1 + t; t; –9 + 6t)* $\in\Delta_1$; Δ_2 *qua A (1; 3; –1) có véctơ chỉ phương* $\vec{a}$ *= (2; 1; –2)*

$\overrightarrow{AM}$ *= (t – 2; t – 3; 6t – 8)* $\Rightarrow \left[\overrightarrow{AM};\vec{a}\right]$ *= (14 – 8t; 14t – 20; 4 – t)*

Ta có : d (M, Δ_2) = d (M, (P)) $\Leftrightarrow \sqrt{261t^2-792t+612} = |11t-20|$

$\Leftrightarrow 35t^2 - 88t + 53 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ *hay* $t = \dfrac{53}{35}$. *Vậy M (0; 1; –3) hay M* $\left(\dfrac{18}{35};\dfrac{53}{35};\dfrac{3}{35}\right)$.

<u>Câu hỏi tương tự</u>:

a) Với (P): $2x+y+2z-1=0$, $\Delta_1: \dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-5}{1}=\dfrac{z}{-1}$, $\Delta_2: \dfrac{x-1}{4}=\dfrac{2-y}{1}=\dfrac{z-3}{1}$

ĐS: $M(2;4;1)$, $M(-1;1;4)$

Câu 163. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng $\Delta_1: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+2}{1}$ và $\Delta_2: \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{7}=\dfrac{z-3}{-1}$. Đường vuông góc chung của Δ_1 và Δ_2 cắt Δ_1 tại A, cắt Δ_2 tại B. Tình diện tích ΔOAB.

• Δ_1 *có VTCP* $\vec{u}_1=(2;-1;1)$, Δ_2 *có VTCP* $\vec{u}_2=(1;7;-1)$

Giả sử $A(1+2t_1;-t_1;-2+t_1)\in\Delta_1$, $B(-1+t_2;1+7t_2;3-t_2)\in\Delta_2$.

Ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{AB}.\vec{u}_1=0\\ \overrightarrow{AB}.\vec{u}_2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t_1=0\Rightarrow A(1;0;-2)\\ t_2=0\Rightarrow B(-1;1;3)\end{cases} \Rightarrow S_{OAB}=\dfrac{1}{2}\left\|\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right]\right\| = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Câu 164. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng (P): $x-2y+2z-1=0$ và các đường thẳng $d_1: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{-3}=\dfrac{z}{2}$; $d_2: \dfrac{x-5}{6}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z+5}{-5}$. Tìm các điểm $M\in d_1, N\in d_2$ sao cho MN // (P) và cách (P) một khoảng bằng 2.

• *PTTS của d_1 là:* $\begin{cases}x=1+2t\\ y=3-3t\\ z=2t\end{cases}$. *M* $\in d_1$ *nên tọa độ của M* $\left(1+2t;3-3t;2t\right)$.

Theo đề: $d(M;(P))=\dfrac{|1+2t-2(3-3t)+4t-1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=2 \Leftrightarrow \dfrac{|12t-6|}{3}=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=1\\ t=0\end{array}\right.$

+ Với t = 1 ta được $M_1\left(3;0;2\right)$; *+ Với t = 0 ta được* $M_2\left(1;3;0\right)$

• *Ứng với M_1, điểm $N_1 \in d_2$ cần tìm phải là giao của d_2 với mp qua M_1 và // (P), gọi mp này là (Q_1). PT (Q_1) là:* $(x-3)-2y+2(z-2)=0 \Leftrightarrow x-2y+2z-7=0$ (1).

PTTS của d_2 là: $\begin{cases} x=5+6t \\ y=4t \\ z=-5-5t \end{cases}$ (2)

Thay (2) vào (1), ta được: $t=-1$. Điểm N_1 cần tìm là $N_1(-1;-4;0)$.

• *Ứng với M_2, tương tự tìm được $N_2(5;0;-5)$.*

Câu 165. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho mặt phẳng (P): $2x-y+2z-1=0$ và các đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{-2}$, $d_2: \frac{x-5}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z+5}{2}$. Tìm các điểm $A \in d_1, B \in d_2$ sao cho AB // (P) và AB cách (P) một khoảng bằng 1.

• *Giả sử:* $A(2t_1+1, t_1+3, -2t_1) \in d_1$, $B(3t_2+5, 4t_2, 2t_2-5) \in d_2$

$\overrightarrow{AB}=(3t_2-2t_1+4, 4t_2-t_1-3, 2t_2+2t_1-5)$

$\overrightarrow{AB}.\vec{n}_P=0 \Leftrightarrow 2(3t_2-2t_1+4)-4t_2+t_1+3+2(2t_2+2t_1-5)=0 \Leftrightarrow 6t_2+t_1+1=0$

$AB \parallel (P) \Rightarrow d(AB,(P))=d(A,(P))=\frac{|4t_1+2-t_1-3-4t_1-1|}{3}=\frac{|t_1+2|}{3}=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1=-5 \\ t_1=1 \end{array}\right.$

• *Với* $t_1=-5 \Rightarrow t_2=\frac{2}{3} \Rightarrow A(-9;-2;10), B\left(7;\frac{8}{3};\frac{-11}{3}\right)$

• *Với* $t_1=1 \Rightarrow t_2=\frac{-1}{3} \Rightarrow A(3;4;-2), B\left(4;\frac{-4}{3};\frac{-17}{3}\right)$

Câu 166. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho ba điểm A(1; 5; 4), B(0; 1; 1), C(1; 2; 1). Tìm tọa độ điểm D thuộc đường thẳng AB sao cho độ dài đoạn thẳng CD nhỏ nhất.

• *Ta có* $\overrightarrow{AB}=(-1;-4;-3)$. *Phương trình đường thẳng AB:* $\begin{cases} x=1-t \\ y=5-4t \\ z=4-3t \end{cases}$.

Gọi $D(1-a;5-4a;4-3a) \in AB \Rightarrow \overrightarrow{DC}=(a;4a-3;3a-3)$.

Độ dài đoạn CD ngắn nhất $\Leftrightarrow$ D là hình chiếu vuông góc của C trên cạnh AB $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{DC}$

$\Leftrightarrow -a-16a+12-9a+9=0 \Leftrightarrow a=\frac{21}{26}$. *Vậy:* $D\left(\frac{5}{26};\frac{46}{26};\frac{41}{26}\right)$.

Câu 167. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x+1}{-2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{1}$ và $d_2: \frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{2}$. Tìm các điểm M thuộc d_1, N thuộc d_2 sao cho đường thẳng MN song song với mặt phẳng (P): $x-y+z+2012=0$ và độ dài đoạn MN bằng $\sqrt{2}$.

• *Lấy* $M \in d_1, N \in d_2$. *Ta có* $\begin{cases} MN \parallel (P) \\ MN=\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MN}.\vec{n}_P=0 \\ MN=\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow M(0;0;0), N\left(-\frac{3}{7};-\frac{2}{7};\frac{5}{7}\right)$.

Câu 168. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho đường thẳng $d: \frac{x}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-1}{1}$ và các điểm $A(1;0;0), B(0;1;1), C(0;0;2)$. Tìm điểm M thuộc d sao cho góc giữa hai mặt phẳng (MAB) và (CAB) bằng $a = 30^0$.

• *ĐS:* $M(0;-2;1)$.

Câu 169. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng có phương trình: $(\Delta_1): \begin{cases} x = 1+t \\ y = -1-t \\ z = 2 \end{cases}$ và $(\Delta_2): \dfrac{x-3}{-1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{1}$. Xác định điểm A trên Δ_1 và điểm B trên Δ_2 sao cho đoạn AB có độ dài nhỏ nhất.

• *Giả sử* $A(t+1; -t-1; 2) \in \Delta_1$, $B(t'+3; 2t'+1; t') \in \Delta_2 \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-t'-t+2; 2t'+t+2; t'-2)$

Vì đoạn AB có độ dài nhỏ nhất ⇔ AB là đoạn vuông góc chung của (Δ_1) *và* (Δ_2)

$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \perp \vec{u}_1 \\ \overrightarrow{AB} \perp \vec{u}_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB}.\vec{u}_1 = 0 \\ \overrightarrow{AB}.\vec{u}_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t+3t' = 0 \\ 3t+6t' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = t' = 0 \Rightarrow A(1; -1; 2), B(3; 1; 0).$$

Câu 170. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho hai điểm A(1; –1; 2), B(3; – 4; –2) và đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2+4t \\ y = -6t \\ z = -1-8t \end{cases}$. Tìm điểm I trên đường thẳng *d* sao cho IA + IB đạt giá trị nhỏ nhất.

• $\overrightarrow{AB} = (2;-3;-4) \Rightarrow AB \,//\, d$. *Gọi* A_1 *là điểm đối xứng của A qua d.*

Ta có: $IA + IB = IA_1 + IB \geq A_1B$. *Do đó IA + IB đạt giá trị nhỏ nhất bằng* A_1B. *Khi đó* A_1, *I, B thẳng hàng ⇒ I là giao điểm của* A_1B *và d. Vì AB // d nên I là trung điểm của* A_1B.

Gọi H là hình chiếu của A lên d. Tìm được $H\left(\dfrac{36}{29}; \dfrac{33}{29}; \dfrac{15}{29}\right)$. *A' đối xứng với A qua H nên* $A'\left(\dfrac{43}{29}; \dfrac{95}{29}; -\dfrac{28}{29}\right)$. *I là trung điểm của A'B suy ra* $I\left(\dfrac{65}{29}; \dfrac{-21}{58}; \dfrac{-43}{29}\right)$.

Câu hỏi tương tự:

a) Với $A(1;-1;2), B(3;-4;-2)$, $d: \dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y}{-6} = \dfrac{z+1}{-8}$. *ĐS:* $I\left(\dfrac{64}{29}; -\dfrac{9}{29}; -\dfrac{45}{29}\right)$.

b) Với $A(1;2;-1)$, $B(7;-2;3)$, $d: \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z-4}{2}$. *ĐS:* $I(2;0;4)$.

Câu 171. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho hai điểm A(1; 5; 0), B(3; 3; 6) và đường thẳng Δ: $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z}{2}$. Tìm toạ độ điểm M trên Δ sao cho ΔMAB có diện tích nhỏ nhất.

• *PTTS của Δ:* $\begin{cases} x = -1+2t \\ y = 1-t \\ z = 2t \end{cases}$. *Gọi* $M(-1+2t; 1-t; 2t) \in \Delta$.

Diện tích ΔMAB là $S = \dfrac{1}{2}\left\|\left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}\right]\right\| = \sqrt{18t^2 - 36t + 216} = \sqrt{18(t-1)^2 + 198} \geq \sqrt{198}$

Vậy Min S = $\sqrt{198}$ *khi* $t = 1$ *hay M(1; 0; 2).*

Câu hỏi tương tự:

a) Với $A(0;1;0), B(2;2;2)$, $\Delta: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z-3}{2}$. *ĐS:* $M(-3;0;-1)$, $\min S = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

b) Với $A(2;-1;1), B(0;1;-2), \Delta: \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$. *ĐS:* $M(-5;8;-11), \min S=\dfrac{\sqrt{34}}{2}$

c) Với $A(0;1;-2), B(2;-1;1), \Delta: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$. *ĐS:* $M(-2;5;-5), \min S=\sqrt{22}$

d) Với $A(2;-1;1), B(1;-1;0), \Delta: \begin{cases} x+y-z-1=0 \\ 2x-y-1=0 \end{cases}$. *ĐS:* $M\left(\dfrac{1}{6};-\dfrac{2}{3};-\dfrac{3}{2}\right)$.

e) Với $A(1;4;2), B(-1;2;4), \Delta: \dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z}{2}$. *ĐS:* $M\left(-\dfrac{12}{7};\dfrac{5}{7};\dfrac{38}{7}\right)$.

Câu 172. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho ba điểm $A(5;8;-11)$, $B(3;5;-4)$, $C(2;1;-6)$ và đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-1}{1}$. Xác định toạ độ điểm M thuộc đường thẳng *d* sao cho $\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

• *Giả sử* $M(2t+1;2t+2;t+1)\in d \Rightarrow \overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=(-2t-1;-2t-4;-t)$

$$\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right| = \sqrt{(2t+1)^2+(2t+4)^2+t^2} = \sqrt{9\left(t+\frac{10}{9}\right)^2+\frac{53}{9}} \ge \frac{\sqrt{53}}{3}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow t=-\dfrac{10}{9} \Rightarrow M\left(-\dfrac{11}{9};-\dfrac{2}{9};-\dfrac{1}{9}\right)$

Câu 173. Trong không gian với hệ trục toạ độ *Oxyz*, cho $(P): x+2y-z+5=0$ điểm *A*(–2; 3; 4) và đường thẳng $(d): \dfrac{x+3}{2}=y+1=z-3$. Gọi *Δ* là đường thẳng nằm trên (*P*) đi qua giao điểm của (*d*) và (*P*) đồng thời vuông góc với *d*. Tìm trên *Δ* điểm *M* sao cho khoảng cách *AM* ngắn nhất.

• *PTTS của d:* $\begin{cases} x=2t-3 \\ y=t-1 \\ z=t+3 \end{cases}$. *Gọi I là giao điểm của (d) và (P)* $\Rightarrow I(-1;0;4)$

(d) có VTCP là $\vec{a}=(2;1;1)$, *(P) có VTPT là* $\vec{n}=(1;2;-1) \Rightarrow [\vec{a},\vec{n}]=(-3;3;3)$.

Gọi $\vec{u}$ *là vectơ chỉ phương của* $\Delta \Rightarrow \vec{u}=(-1;1;1) \Rightarrow \Delta: \begin{cases} x=1-u \\ y=u \\ z=4+u \end{cases}$.

Vì $M\in\Delta \Rightarrow M(-1-u;u;4+u)$, $\Rightarrow \overrightarrow{AM}=(1-u;u-3;u)$

AM ngắn nhất $\Leftrightarrow AM\perp\Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{u}=0 \Leftrightarrow -1(1-u)+1(u-3)+1.u=0 \Leftrightarrow u=\dfrac{4}{3}$.

Vậy $M\left(\dfrac{-7}{3};\dfrac{4}{3};\dfrac{16}{3}\right)$

Câu 174. Trong không gian Oxyz, cho hai điểm A(–1; –1; 2), B(–2; –2; 1) và mặt phẳng (P) có phương trình $x+3y-z+2=0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) là mặt phẳng trung trực của đoạn AB. Gọi Δ là giao tuyến của (P) và (Q). Tìm điểm M thuộc Δ sao cho độ dài đoạn thẳng OM là nhỏ nhất.

• *Gọi I là trung điểm của AB* $\Rightarrow I\left(\dfrac{-3}{2};\dfrac{-3}{2};\dfrac{3}{2}\right)$; $\overrightarrow{AB}=(-1;-1;-1)$

$\Rightarrow$ *PT (Q):* $x+y+z+\frac{3}{2}=0$

Δ là giao tuyến của (P) và (Q) $\Rightarrow$ *PTTS của Δ:* $\left\{x=-\frac{7}{4}+2t;\ y=-t;\ z=\frac{1}{4}-t\right.$.

Giả sử $M\left(-\frac{7}{4}+2t;-t;\frac{1}{4}-t\right)\in\Delta;\ \ OM=\sqrt{6t^2-\frac{15}{2}t+\frac{25}{8}}$.

OM nhỏ nhất khi $t=\frac{5}{8}\Rightarrow M\left(-\frac{1}{2};-\frac{5}{8};-\frac{3}{8}\right)$.

Câu 175. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho hai đường thẳng (d_1): $\frac{x-3}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{-2}$, ($d_2$): $\frac{x-2}{-1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{1}$. Một đường thẳng (Δ) đi qua điểm A(1; 2; 3), cắt đường thẳng (d_1) tại điểm B và cắt đường thẳng (d_2) tại điểm C. Chứng minh rằng điểm B là trung điểm của đoạn thẳng AC.

• *Lấy B* $\in$ *(d_1), C* $\in$ *(d_2). Từ :* $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}\ \Rightarrow k=\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ *B là trung điểm của đoạn thẳng AC.*

Ta có thể tính được B(2; –1; 1), C(3; –4; –1).

Câu 176. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho hai điểm $E(2;1;5)$, $F(4;3;9)$. Gọi Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng (*P*): $2x+y-z+1=0$ và (Q): $x-y+2z-7=0$. Tìm điểm *I* thuộc Δ sao cho: $\left|IE-IF\right|$ lớn nhất .

• *PTTS của Δ:* $\begin{cases}x=1+t\\ y=-5t\\ z=3-3t\end{cases}$. *PTTS của EF:* $\begin{cases}x=2+t'\\ y=1+t'\\ z=5+2t'\end{cases}$.

Xét hệ: $\begin{cases}1+t=2+t'\\ -5t=1+t'\\ 3-3t=5+2t'\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=0\\ t'=-1\end{cases}$ $\Rightarrow$ *EF cắt Δ tại A(1;0;3).*

Trong mp(Δ,EF) mọi điểm I $\in\Delta$ *ta có* $\left|IE-IF\right|\le EF$ *(hiệu 2 cạnh trong 1 tam giác nhỏ hơn cạnh thứ 3). Dấu "=" xảy ra* $\Leftrightarrow$ *I, E, F thẳng hàng, từ đó suy ra I trùng A.*
Vậy điểm I(1;0;3).

Câu 177. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho đường thẳng $d:\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$ và hai điểm $A(0;0;3)$, $B(0;3;3)$. Tìm điểm M $\in$ *d* sao cho:

a) $MA+MB$ nhỏ nhất. b) MA^2+2MB^2 nhỏ nhất. c) $\left|\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}\right|$ nhỏ nhất.

• **a)** *PTTS của d:* $\begin{cases}x=t\\ y=t\\ z=t\end{cases}$. *Gọi* $M(t;t;t)\in d$. *Ta có:* $P=\sqrt{3}\left(\sqrt{(t-1)^2+2}+\sqrt{(t-2)^2+2}\right)$

Xét hàm số $f(t)=\sqrt{(t-1)^2+2}+\sqrt{(t-2)^2+2}\ \Rightarrow\ f'(t)=\frac{t-1}{\sqrt{(t-1)^2+2}}+\frac{t-2}{\sqrt{(t-2)^2+2}}$

$$f'(t)=0\Leftrightarrow\frac{t-1}{\sqrt{(t-1)^2+2}}=-\frac{t-2}{\sqrt{(t-2)^2+2}}\Leftrightarrow\frac{t-1}{\sqrt{(t-1)^2+2}}=\frac{-(t-2)}{\sqrt{\left[-(t-2)\right]^2+2}}\qquad (*)$$

Xét hàm số $g(u)=\dfrac{u}{\sqrt{u^2+2}}$. *Ta có* $g'(u)=\left(\sqrt{u^2+2}-u.\dfrac{u}{\sqrt{u^2+2}}\right).\dfrac{1}{u^2+2}=\dfrac{2}{\sqrt{(u^2+2)^3}}>0$

nên hàm số g đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó từ (*), ta có $g(t-1)=g\left[-(t-2)\right]\Leftrightarrow t-1=-t+2\Leftrightarrow t=\dfrac{3}{2}$

Dựa vào BBT của hàm số f ta suy ra $\min f(t)=f\left(\dfrac{3}{2}\right)=3$.

Vậy $\min(MA+MB)=3\sqrt{3}$ *đạt được tại* $t=\dfrac{3}{2}$, *tức là* $M\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right)$.

b) *Tương tự câu 1), ta tính được* $Q=MA^2+2MB^2=9t^2-30t+45=(3t-5)^2+20$.

$\Rightarrow \min Q=20$ *khi* $t=\dfrac{5}{3}$, *tức* $M\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{5}{2};\dfrac{5}{2}\right)$.

c) *Theo câu 1), ta có* $\overrightarrow{MA}=(-t;-t;3-t)$, $\overrightarrow{MB}=(-t;3-t;3-t)$.

Suy ra $\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}=(t;t-6;t-3)$ $\Rightarrow\left|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}\right|=\sqrt{3t^2-18t+45}=\sqrt{3(t-3)^2+18}\geq 3\sqrt{2}$

Vậy $\min\left|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}\right|=3\sqrt{2}$ *khi* $t=3$, *tức* $M(3;3;3)$.

Dạng 3: Xác định điểm thuộc mặt cầu

Câu 178. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2+4x-6y+m=0$ và đường thẳng (d) là giao tuyến của 2 mặt phẳng (P): $2x-2y-z+1=0$, (Q): $x+2y-2z-4=0$ và . Tìm *m* để (S) cắt (d) tại 2 điểm M, N sao cho độ dài MN = 8.

• *(S) tâm I(–2;3;0), bán kính R=* $\sqrt{13-m}=IM$ $(m<13)$. *Gọi H là trung điểm của MN*

⇒ MH= 4 ⇒ IH = d(I; d) = $\sqrt{-m-3}$

(d) qua A(0;1;-1), VTCP $\vec{u}=(2;1;2) \Rightarrow$ *d(I; d) =* $\dfrac{\left|\left[\vec{u};\overrightarrow{AI}\right]\right|}{|\vec{u}|}=3$.

Vậy : $\sqrt{-m-3}$ *=3 ⇔ m = –12.*

Câu 179. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho mặt phẳng (P): $x+y-z+3=0$ và mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-6x-8y-2z+23=0$. Tìm trên (S) điểm M sao cho khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) là lớn nhất. Khi đó hãy viết phương trình mặt cầu (T) có tâm M và cắt (P) theo một đường tròn có bán kính bằng 4.

• *Mặt cầu (S) có tâm* $I(3;4;1)$, *bán kính* $R=\sqrt{3}$

Gọi d là đường thẳng qua I vuông góc với (P) ⇒ PTTS của d: $\begin{cases} x=3+t \\ y=4+t \\ z=1-t \end{cases}$

Khi đó M là giao điểm của d với (S) ⇒ Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x=3+t \\ y=4+t \\ z=1-t \\ x^2+y^2+z^2-6x-8y-2z+23=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ x=4 \\ y=5 \\ z=0 \end{cases} \cup \begin{cases} t=-1 \\ x=2 \\ y=3 \\ z=2 \end{cases} \Rightarrow M_1(4;5;0), M_2(2;3;2)$$

Ta thấy $d(M_1,(P))=4\sqrt{3} > d(M_2,(P))=2\sqrt{3}$. *Vậy* $M(4;5;0)$ *là điểm cần tìm.*

Mặt cầu (T) có $R'=\sqrt{MH^2+HE^2}=\sqrt{(4\sqrt{3})^2+4^2}=8 \Rightarrow (T):(x-4)^2+(y-5)^2+z^2=64$

Câu 180. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt cầu (S) và mặt phẳng (P) có phương trình là $(S): x^2+y^2+z^2-4x+2y-6z+5=0, (P): 2x+2y-z+16=0$. Điểm M di động trên (S) và điểm N di động trên (P). Tính độ dài ngắn nhất của đoạn thẳng MN. Xác định vị trí của M, N tương ứng.

• *Mặt cầu (S) tâm I(2;–1;3) và có bán kính R = 3.*

Khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P): $d=d\left(I,(P)\right)=\dfrac{|2.2+2.(-1)-3+16|}{3}=5 \Rightarrow d>R$.

Do đó (P) và (S) không có điểm chung. Do vậy, min MN = d –R = 5 –3 = 2.
Trong trường hợp này, M ở vị trí M_0 và N ở vị trí N_0. Dễ thấy N_0 là hình chiếu vuông góc của I trên mặt phẳng (P) và M_0 là giao điểm của đoạn thẳng IN_0 với mặt cầu (S).
Gọi Δ là đường thẳng đi qua I và vuông góc với (P), thì N_0 là giao điểm của Δ và (P).

Đường thẳng Δ có VTCP là $\vec{n_P}=(2;2;-1)$ *và qua I nên có phương trình là* $\begin{cases} x=2+2t \\ y=-1+2t \\ z=3-t \end{cases}$.

Tọa độ của N_0 ứng với t nghiệm đúng phương trình:

$$2(2+2t)+2(-1+2t)-(3-t)+16=0 \Leftrightarrow 9t+15=0 \Leftrightarrow t=-\frac{15}{9}=-\frac{5}{3}$$

Suy ra $N_0\left(-\frac{4}{3};-\frac{13}{3};\frac{14}{3}\right)$. *Ta có* $\overrightarrow{IM_0}=\frac{3}{5}\overrightarrow{IN_0}$. *Suy ra* $M_0(0;-3;4)$

Câu hỏi tương tự:

a) $(S): x^2+y^2+z^2-4x-4y+2z=0$; $(P): 2x+y-2z+4=0$.

ĐS: $M(2-2\sqrt{2};2-\sqrt{2};-1+2\sqrt{2})$, $N\left(\frac{-2}{3};\frac{-1}{3};\frac{5}{3}\right)$

Câu 181. Trong không gian tọa độ Oxyz , cho điểm $A(0;1;1), B(1;0;-3), C(-1;-2;-3)$ và mặt cầu (S) có phương trình: $x^2+y^2+z^2-2x+2z-2=0$. Tìm tọa độ điểm D trên mặt cầu (S) sao cho tứ diện ABCD có thể tích lớn nhất.

• *(S) có tâm I(1; 0; –1), bán kính* $R=2$. *PT mp(ABC):* $2x-2y+z+1=0$

Ta có $V_{ABCD}=\frac{1}{3}d(D;(ABC)).S_{ABC}$ *nên* V_{ABCD} *lớn nhất* $\Leftrightarrow$ $d(D;(ABC))$ *lớn nhất* .

Gọi D_1D_2 *là đường kính của (S) vuông góc với mp(ABC). Ta thấy với D là 1 điểm bất kỳ thuộc (S) thì* $d(D;(ABC)) \le \max\left\{d(D_1;(ABC)); d(D_2;(ABC))\right\}$.

Dấu "=" xảy ra khi D trùng với D_1 *hoặc* D_2.

D_1D_2 *đi qua I(1;0;–1), và có VTCP là* $\vec{n}_{ABC}=(2;-2;1)$

$\Rightarrow D_1D_2:\ \{x=1+2t; y=-2t; z=-1+t$

Tọa độ D_1 *và* D_2 *thỏa:* $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-2t \\ z=-1+t \\ (x-1)^2+y^2+(z+1)^2=4 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{2}{3} \\ t=\frac{-2}{3} \end{array}\right.$

$\Rightarrow D_1\left(\frac{7}{3};\frac{-4}{3};\frac{-1}{3}\right); D_2\left(\frac{-1}{3};\frac{4}{3};\frac{-5}{3}\right)$

Ta thấy: $d(D_1;(ABC)) > d(D_2;(ABC))$. *Vậy điểm* $D\left(\frac{7}{3};-\frac{4}{3};-\frac{1}{3}\right)$ *là điểm cần tìm.*

Dạng 4: Xác định điểm trong không gian

Câu 182. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho mặt phẳng (α): $3x+2y-z+4=0$ và hai điểm A(4;0;0) , B(0;4;0) .Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AB. Xác định tọa độ điểm K sao cho KI vuông góc với mặt phẳng (α), đồng thời K cách đều gốc tọa độ O và (α).

• *I(2;2;0). PT đường thẳng KI:* $\frac{x-2}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{-1}$.

Gọi H là hình chiếu của I trên (α): H(–1;0;1). Giả sử $K(x_o;y_o;z_o)$.

Ta có: $KH = KO \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x_0-2}{3}=\frac{y_0-2}{2}=\frac{z_0}{-1} \\ \sqrt{(x_0+1)^2+y_0^2+(z_0-1)^2}=\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2} \end{cases} \Rightarrow K\left(-\frac{1}{4};\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right)$.

Câu 183. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho 4 điểm A(2;4;–1), B(1;4;–1), C(2;4;3), D(2;2;–1). Tìm tọa độ điểm M để $MA^2+MB^2+MC^2+MD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

• *Gọi G là trọng tâm của ABCD ta có:* $G\left(\frac{7}{3};\frac{14}{3};0\right)$.

Ta có: $MA^2+MB^2+MC^2+MD^2=4MG^2+GA^2+GB^2+GC^2+GD^2$

$\geq GA^2+GB^2+GC^2+GD^2$. *Dấu bằng xảy ra khi* $M\equiv G\left(\frac{7}{3};\frac{14}{3};0\right)$.

Câu 184. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho mặt phẳng (P): $x+y+z+3=0$ và điểm A(0; 1; 2). Tìm toạ độ điểm A′ đối xứng với A qua mặt phẳng (P).

• *(P) có VTPT* $\vec{n}=(1;1;1)$. *Giả sử A′(x; y; z).*

Gọi I là trung điểm của AA′ $\Rightarrow I\left(\frac{x}{2};\frac{y+1}{2};\frac{z+2}{2}\right)$.

A′ đối xứng với A qua (P) $\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AA'},\vec{n} \text{ cùng phương} \\ I\in(P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{1} \\ \frac{x}{2}+\frac{y+1}{2}+\frac{z+2}{2}+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=-3 \\ z=-2 \end{cases}$

Vậy: A′(–4; –3; –2).

Câu 185. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho các điểm $A(1;0;0), B(0;1;0), C(0;3;2)$ và mặt phẳng $(\alpha): x+2y+2=0$. Tìm toạ độ của điểm M biết rằng M cách đều các điểm A, B, C và mặt phẳng (α).

• *Giả sử* $M(x_0;y_0;z_0)$.

Ta có: $\begin{cases} MA=MB \\ MB=MC \\ MA=d(M,(\alpha)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_0-1)^2+y_0^2+z_0^2=x_0^2+(y_0-1)^2+z_0^2 & (1) \\ x_0^2+(y_0-1)^2+z_0^2=x_0^2+(y_0-3)^2+(z_0-2)^2 & (2) \\ (x_0-1)^2+y_0^2+z_0^2=\frac{(x_0+2y_0+2)^2}{5} & (3) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=1, y_0=1, z_0=2 \\ x_0=\frac{23}{3}, y=\frac{23}{3}, z_0=-\frac{14}{3} \end{array}\right. \Rightarrow M(1;1;2)$ *hoặc* $M\left(\frac{23}{3};\frac{23}{3};-\frac{14}{3}\right)$.

Câu 186. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho hình chóp tam giác đều S.ABC, biết

$A(3;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;3)$. Tìm toạ độ đỉnh S biết thể tích khối chóp S.ABC bằng 36.

• *Phương trình* $(ABC): x+y+z-3=0$.

ΔABC có trọng tâm $G(1;1;1)$ *và AB= BC= CA=* $3\sqrt{2} \Rightarrow S_{ABC} = \dfrac{9\sqrt{3}}{2}$.

Do hình chóp S.ABC đều nên đường thẳng SG qua G và vuông góc với (ABC)

Phương trình $SG: \begin{cases} x=1+t \\ y=1+t \\ z=1+t \end{cases}$. *Giả sử* $S(1+t;1+t;1+t)$

Ta có : $V_{S.ABC}=36=\dfrac{1}{3}SG.\,S_{ABC} \Leftrightarrow t=8,\ t=-8$. Vậy: $S(9;9;9)$ *hoặc* $S(-7;-7;-7)$.

Dạng 5: Xác định điểm trong đa giác

Câu 187. Trong không gian với hệ trục toạ độ Oxyz, cho ba điểm A(1;0;0), B(0;2;0), C(0;0;3). Tìm toạ độ trực tâm của tam giác ABC.

• *Lập phương trình mp(ABC); (P) qua A và (P) $\perp$ BC; (Q) qua B và (Q) $\perp$ AC*

Giải hệ gồm ba phương trình ba mặt phẳng trên ta được trực tâm $H\left(\dfrac{36}{49};\dfrac{18}{49};\dfrac{12}{49}\right)$

Câu hỏi tương tự:

a) Với A(3;0;0), B(0;1;4), C(1;2;2). *ĐS:*

Câu 188. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho các điểm $A(-1;3;5)$, $B(-4;3;2)$, $C(0;2;1)$. Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC*.

• *Ta có:* $AB=BC=CA=3\sqrt{2} \Rightarrow \Delta ABC$ *đều. Do đó tâm I của đường tròn ngoại tiếp* ΔABC *cũng là trọng tâm của nó. Kết luận:* $I\left(-\dfrac{5}{3};\dfrac{8}{3};\dfrac{8}{3}\right)$.

Câu 189. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho các điểm *A*(–1; 0; 1), *B*(1; 2; –1), *C*(–1; 2; 3). Tìm tọa độ tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC*.

• *Ta có:* $\overrightarrow{AB}=(2;2;-2)$, $\overrightarrow{AC}=(0;2;2)$. *Suy ra phương trình mặt phẳng trung trực của AB, AC là:* $x+y-z-1=0,\ y+z-3=0$.

VTPT của mp(ABC) là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(8;-4;4)$. *Suy ra (ABC):* $2x-y+z+1=0$.

Giải hệ: $\begin{cases} x+y-z-1=0 \\ y+z-3=0 \\ 2x-y+z+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2 \\ z=1 \end{cases}$. *Suy ra tâm đường tròn là* $I(0;2;1)$.

Bán kính là $R=IA=\sqrt{(-1-0)^2+(0-2)^2+(1-1)^2}=\sqrt{5}$.

Câu 190. Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, cho ba điểm $A(2;3;1)$, $B(-1;2;0)$, $C(1;1;-2)$. Tìm tọa độ trực tâm H và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

• $H(x;y;z)$ *là trực tâm của* $\Delta ABC \Leftrightarrow BH \perp AC, CH \perp AB, H \in (ABC)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=0 \\ \overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB}=0 \\ \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AH}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left\{ x=\frac{2}{15}; y=\frac{29}{15}; z=-\frac{1}{3} \right. \Rightarrow H\left(\frac{2}{15};\frac{29}{15};-\frac{1}{3}\right)$$

$I(x;y;z)$ *là tâm đường tròn ngoại tiếp* $\Delta ABC \Leftrightarrow AI=BI=CI, I\in(ABC)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} AI^2=BI^2 \\ CI^2=BI^2 \\ \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\overrightarrow{AI}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left\{ x=\frac{14}{15};\ y=\frac{61}{30};\ z=-\frac{1}{3} \right. \Rightarrow I\left(\frac{14}{15};\frac{61}{30};-\frac{1}{3}\right)$$

Câu 191. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho ba điểm $A(-1;0;1), B(1;2;-1), C(-1;2;3)$ và *I* là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC*. Lập phương trình mặt cầu (S) có tâm *I* và tiếp xúc với mặt phẳng (*Oxz*).

• *Phương trình* $(ABC): 2x-y+z+1=0$. *Gọi* $I(x;y;z)$.

$IA=IB=IC \Rightarrow x+y-z-1=0, y+z-3=0$ (1); $I\in(ABC)\Rightarrow 2x-y+z+1=0$ (2)

Từ (1) (2) $\Rightarrow I(0;2;1)$. *Bán kính mặt cầu là* $R=d(I,(Oxz))=2$

$\Rightarrow$ *(S):* $x^2+(y-2)^2+(z-1)^2=4$

Câu 192. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz,* cho tam giác ABC có $A(3;1;0)$, B nằm trên mặt phẳng (O*xy*) và C nằm trên trục Oz. Tìm toạ độ các điểm B, C sao cho điểm $H(2;1;1)$ là trực tâm của tam giác ABC.

• *Giả sử* $B(x;y;0)\in(Oxy), C(0;0;z)\in Oz$.

H là trực tâm của $\Delta ABC \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AH} \text{ đồng phẳng} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0 \\ \overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB}=0 \\ \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AH}\right].\overrightarrow{AC}=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+z=0 \\ 2x+y-7=0 \\ 3x-3y+yz-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-3-\sqrt{177}}{4}; y=\dfrac{17+\sqrt{177}}{2}; z=\dfrac{3+\sqrt{177}}{4} \\ x=\dfrac{-3+\sqrt{177}}{4}; y=\dfrac{17-\sqrt{177}}{2}; z=\dfrac{3-\sqrt{177}}{4} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow B\left(\frac{-3-\sqrt{177}}{4};\frac{17+\sqrt{177}}{2};0\right), C\left(0;0;\frac{3+\sqrt{177}}{4}\right)$$

hoặc $B\left(\frac{-3+\sqrt{177}}{4};\frac{17-\sqrt{177}}{2};0\right), C\left(0;0;\frac{3-\sqrt{177}}{4}\right)$

Câu 193. Trong không gian O*xyz*, cho điểm A(3; 2; 3) và hai đường thẳng có phương trình $d_1: \frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-3}{-2}$ và $d_2: \frac{x-1}{1}=\frac{y-4}{-2}=\frac{z-3}{1}$. Chứng minh đường thẳng d_1, d_2 và điểm A cùng nằm trong một mặt phẳng. Xác định toạ độ các đỉnh B và C của tam giác ABC biết d_1 chứa đường cao BH và d_2 chứa đường trung tuyến CM của tam giác ABC.

• *d_1 qua $M_1(2; 3; 3)$, có VTCP* $\vec{a}=(1;1;-2)$; *d_2 qua $M_2(1; 4; 3)$ có VTCP* $\vec{b}=(1;-2;1)$

Ta có $\left[\vec{a},\vec{b}\right]\neq\vec{0}$, $\left[\vec{a},\vec{b}\right].\overrightarrow{M_1M_2}=0 \Rightarrow d_1,d_2$ *cắt nhau.*

Phương trình mặt phẳng chứa d_1,d_2*:* $x+y+z-8=0$ $A\in mp(d_1,d_2)$.

Giả sử $B(2+t;3+t;3-2t)\in d_1 \Rightarrow$ *trung điểm của AB là* $M\left(\frac{t+5}{2};\frac{t+5}{2};3-t\right)$

$M \in d_2 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow M(2;2;4) \Rightarrow B(1;2;5)$.

Giả sử $C(1+t;4-2t;3+t) \in d_2$. $\overrightarrow{AC} \perp \vec{a} \Rightarrow t = 0 \Rightarrow C(1;4;2)$

Câu 194. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho cho tam giác *ABC* có *A(3;2;3)*, đường cao CH, đường phân giác trong *BM* của góc *B* lần lượt có phương trình là $d_1: \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-3}{-2}$, $d_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-3}{1}$. Tính độ dài các cạnh của tam giác của tam giác ABC.

• *Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với* $d_1 \Rightarrow$ *(P):* $x+y-2z+1=0$. *B là giao điểm của* d_2 *với (P)* $\Rightarrow B(1;4;3)$.

Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với $d_2 \Rightarrow$ *(Q):* $x-2y+z-2=0$. *Gọi K là giao điểm của* d_2 *với (Q)* $\Rightarrow K(2;2;4)$. *Gọi E là điểm đối xứng của A qua K* $\Rightarrow E(1;2;5)$.

Phương trình đường thẳng BE là $\begin{cases} x = 1 \\ y = 4 - t \\ z = 3 + t \end{cases}$. *C là giao điểm của BE và CH* $\Rightarrow C(1;2;5)$.

Ta có AB = AC = BC = $2\sqrt{2} \Rightarrow$ *Tam giác ABC đều.*

Câu 195. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho hình thang cân ABCD với $A(3;-1;-2)$, $B(1;5;1)$, $C(2;3;3)$, trong đó AB là đáy lớn, CD là đáy nhỏ. Tìm toạ độ điểm D.

• *Do ABCD là hình thang cân nên AD = BC = 3.*
Gọi Δ *là đường thẳng qua C và song song với AB, (S) là mặt cầu tâm A bán kính R = 3. Điểm D cần tìm là giao điểm của* Δ *và (S).*

Đường thẳng Δ *có vectơ chỉ phương* $\overrightarrow{AB} = (-2;6;3)$ *nên có phương trình:* $\begin{cases} x = 2-2t \\ y = 3+6t \\ z = 3+3t \end{cases}$

Phương trình mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 = 9$
Toạ độ điểm D thoả Hệ PT:

$$\begin{cases} x = 2-2t \\ y = 3+6t \\ z = 3+3t \\ (x-3)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow 49t^2 + 82t + 33 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = -\frac{33}{49} \end{array} \right.$$

• *Với t = – 1, thì D(4; – 3; 0) : không thoả vì AB = CD = 7*

• *Với* $t = -\frac{33}{49} \Rightarrow D\left(\frac{164}{49};-\frac{51}{49};\frac{48}{49}\right)$ *(nhận)*

Câu 196. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho hình thoi *ABCD* với $A(-1;2;1)$, $B(2;3;2)$. Tìm tọa độ các đỉnh C, D và viết phương trình mặt phẳng chứa hình thoi đó biết rằng tâm I của hình thoi thuộc đường thẳng $d: \frac{x+1}{-1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{1}$ và điểm D có hoành độ âm.

• *Gọi* $I(-1-t;-t;2+t) \in d$. *Ta có* $\overrightarrow{IA} = (t;2+t;-1-t)$, $\overrightarrow{IB} = (3+t;3+t;-t)$.

Do ABCD là hình thoi nên $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} = 0 \Leftrightarrow 3t^2 + 9t + 6 = 0 \Leftrightarrow t = -1,\ t = -2$.
Vì C đối xứng với A qua I và D đối xứng với B qua I nên:

+ *Với* $t=-1 \Rightarrow I(0;1;1) \Rightarrow C(1;0;1),\ D(-2;-1;0)$.

+ *Với* $t=-2 \Rightarrow I(1;2;0) \Rightarrow C(3;2;-1),\ D(0;1;-2)$

Do D có hoành độ âm nên ta chọn được nghiệm $C(1;0;1),\ D(-2;-1;0)$

+ Gọi (P) là mặt phẳng chứa hình thoi ABCD, giả sử (P) có VTPT $\vec{n}$

Ta có $\begin{cases} \vec{n} \perp \overrightarrow{IA}=(-1;1;0) \\ \vec{n} \perp \overrightarrow{IB}=(2;2;1) \end{cases} \Rightarrow$ *có thể chọn* $\vec{n}=\left[\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB}\right]=(1;1;-4)$

Suy ra phương trình mặt phẳng $(P): x+y-4z+3=0$..

Câu 197. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz,* cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình vuông, $A(1;0;0)$, $C(-1;2;0)$, $D(-1;0;0)$, $S(0;0;\sqrt{3})$. Gọi *M, N* lần lượt là trung điểm của đoạn *SB* và *CD.* Chứng minh rằng hai đường thẳng *AM* và *BN* vuông góc với nhau và xác định tọa độ tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác *ONB.*

• $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC} \Rightarrow$ *B(1; 2; 0). M là trung điểm SB, N là trung điểm CD*

$\Rightarrow M\left(\frac{1}{2};1;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, *N(–1; 1; 0)* $\Rightarrow AM \perp BN$. *Vì ΔONB nằm trong mp(Oxy) nên tâm I của đường tròn ngoại tiếp ΔONB thuộc mp(Oxy).*

Gọi $I(x;y;0)$. *Ta có:* $\begin{cases} IO=IN \\ IO=IB \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{1}{6};\frac{7}{6};0\right)$.

Câu 198. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz,* cho hình vuông *MNPQ* có $M(5;3;-1)$, $P(2;3;-4)$. Tìm toạ độ đỉnh *Q* biết rằng đỉnh *N* nằm trong mặt phẳng $(R): x+y-z-6=0.$

• *Gọi I là tâm hình vuông* $\Rightarrow I\left(\frac{7}{2};3;-\frac{5}{2}\right)$. *Gọi* $N(a;b;c)\in(R)$. $\overrightarrow{MP}=(-3;0;-3)$.

$\overrightarrow{IN}=\left(a-\frac{7}{2};b-3;c+\frac{5}{2}\right)$; $MP=3\sqrt{2} \Rightarrow IN=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Ta có: $\begin{cases} N\in(R) \\ \overrightarrow{IN}\perp\overrightarrow{MP} \\ IN=\frac{3\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b-c-6=0 \\ -3\left(a-\frac{7}{2}\right)-3\left(c+\frac{5}{2}\right)=0 \\ \left(a-\frac{7}{2}\right)^2+(b-3)^2+\left(c+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2,b=3,c=-1 \\ a=3,b=1,c=-2 \end{array}\right.$

• *Nếu* $N(2;3-1)$ *thì* $Q(5;3;-4)$. • *Nếu* $N(3;1;-2)$ *thì* $Q(4;5;-3)$.

Câu 199. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz,* cho hình vuông ABCD, biết $B(3;0;8)$, $D(-5;-4;0)$ và đỉnh A thuộc mặt phẳng (*Oxy*). Tìm tọa độ điểm *C.*

• *Ta có trung điểm BD là I(–1;–2; 4), BD = 12 và điểm A thuộc mp(Oxy) nên A(a; b; 0).*

ABCD là hình vuông $\Rightarrow \begin{cases} AB^2=AD^2 \\ AI^2=\left(\frac{1}{2}BD\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-3)^2+b^2+8^2=(a+5)^2+(b+4)^2 \\ (a+1)^2+(b+2)^2+4^2=36 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b=4-2a \\ (a+1)^2+(6-2a)^2=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$ *hoặc* $\begin{cases} a=\frac{17}{5} \\ b=\frac{-14}{5} \end{cases} \Rightarrow$ *A(1; 2; 0) hoặc* $A\left(\frac{17}{5};\frac{-14}{5};0\right)$

• *Với A(1; 2; 0)* $\Rightarrow$ *C(–3;–6; 8)* • *Với* $A\left(\frac{17}{5};\frac{-14}{5};0\right) \Rightarrow C\left(\frac{-27}{5};\frac{-6}{5};8\right)$.

Câu 200. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho hình vuông ABCD, biết $A(1;2;0), C(2;3;-4)$. và đỉnh B nằm trên mặt phẳng (Q): $x+2y+z-3=0$. Tìm toạ độ của đỉnh D, biết toạ độ của B là những số nguyên.

• $AC = 3\sqrt{2} \Rightarrow AB = 3$. *Gọi* $B(x;y;z)$.

Ta có: $\begin{cases} B \in (Q) \\ AB = CB \\ AB = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+z=3 \quad (1) \\ (x-1)^2+(y-2)^2+z^2=(x-2)^2+(y-3)^2+(x+4)^2 \; (2) \\ (x-1)^2+(y-2)^2+z^2=9 \; (3) \end{cases}$

$\Leftrightarrow x=-1;\; y=1;\; z=2 \Rightarrow B(-1;1;2)$. *Vậy* $D(4;4;-6)$.

Chân thành cảm ơn các bạn đồng nghiệp và các em học sinh đã đọc tập tài liệu này.

transitung_tv@yahoo.com