

CÁC KỸ THUẬT CẦN NẮM

Đây là những kỹ thuật, phương pháp mà bạn cần nắm trước khi theo dõi các bài tập:

- Kỹ thuật 1: Tối ưu hóa Solve.**

Hiểu đơn giản là cách tìm nghiệm PT bằng Solve sao cho tối ưu nhất (không sót nghiệm). Kinh nghiệm Solve sẽ được tích lũy dần qua luyện tập, ngoài ra, các bạn có thể xem ở phần đầu sách **CASIO công phá Toán** để biết vài điều cơ bản:

<http://vietnamcasioerteam.blogspot.com/2015/12/cuon-sach-hot-nhat-cua-toi.html>

- Kỹ thuật 2: Kiểm tra bội nghiệm.**

Nghiệm $x = x_0$ được gọi là nghiệm bội k (hoặc nghiệm kép nếu $k = 2$) của PT

$f(x) = 0$ thì ta có thể phân tích $f(x) = (x - x_0)^k g(x)$. Khi đó để kiểm tra xem nghiệm

bội mấy ta áp dụng $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{(x - x_0)^{k-1}} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{(x - x_0)^k} \neq 0 \end{cases}$. Đặc biệt nếu $f(x)$ là đa thức thì đơn giản

hơn là $\begin{cases} f(x) \div (x - x_0)^k \\ f(x) \not\div (x - x_0)^{k+1} \end{cases}$

Về mặt đạo hàm ta có $\begin{cases} f^{(i)}(x_0) = 0 \quad \forall i = \overline{0, k-1} \\ f^{(i)}(x_0) \neq 0 \quad \forall i \geq k \end{cases}$, nên để kiểm tra nghiệm kép, ta có

thể kiểm tra 2 điều kiện $\begin{cases} \left. \frac{d}{dx}(f(X)) \right|_{x=x_0} = 0 \\ \left. \frac{d}{dx}(f(X)) \right|_{x=x_0+0,1} \cdot \left. \frac{d}{dx}(f(X)) \right|_{x=x_0-0,1} < 0 \end{cases}$ có thỏa hay không,

hoặc dùng TABLE để đánh giá nếu bấm theo cách đạo hàm bị lỗi "Time Out".

Còn nghiệm bội 3 của PT $f(x) = 0$, thì theo tính chất trên nó chính là nghiệm kép của PT $f'(x) = 0$, nên ta đạo hàm tay $f'(x)$ rồi kiểm tra nghiệm kép của nó.

- **Kỹ thuật 3: Sử dụng TABLE xét sự biến thiên.**

TABLE có thể dùng để đánh giá sự biến thiên của $f(x)$ để dò khoảng chứa nghiệm PT (may mắn hơn thì dò được nghiệm đúng), hoặc định hướng sử dụng phương pháp đánh giá. Ngoài ra, khi dùng TABLE để đánh giá nghiệm kép, ta căn cứ vào việc $f(a)f(b) > 0$ với a, b là 2 giá trị rất gần và nằm 2 bên nghiệm x_0 (trong lân cận của x_0) để biết được x_0 có là nghiệm kép hay không.

- **Kỹ thuật 4: Sử dụng TABLE tìm nhân tử.**

Bản chất của công việc này là quét giá trị một vài hệ số nào đó chưa biết trong nhân tử để dò 1 hệ số còn lại của nó, dựa vào căn cứ là các hệ số đều hữu tỉ, và nhân tử này có chứa nghiệm vô tỉ $x_0 = A$ (là nghiệm Solve được).

Ví dụ nhân tử cần truy có dạng $[ax + b + c\sqrt{g(x)}]$, thì vì ta có $c\sqrt{g(A)} + aA = -b$

nên trong TABLE ta nhập $f(X) = \sqrt{g(A)} + XA$ rồi cho X nguyên chạy trong 1 khoảng nhất định (thường là $[-14; 14]$) xem có giá trị $f(X)$ nào hữu tỉ hay không.

Nếu không có, thì nâng hệ số của căn lên thành $f(X) = 2\sqrt{g(A)} + XA$ rồi tiếp tục dò.

Cứ như thế đến khi nào tìm ra thì thôi. Thông thường nâng đến $c = 5$ là tối đa rồi, vẫn không ra thì nên dừng.

Dạng $[a + b\sqrt{g(x)} + c\sqrt{h(x)}]$ hoàn toàn tương tự, ta nhập $f(X) = \sqrt{g(A)} + X\sqrt{h(A)}$

Đối với nhân tử dạng $[ax^2 + bx + c + d\sqrt{g(x)}]$, vì lí do $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{d}{a}\sqrt{g(x)} = -\frac{c}{a}$ nên

ta nhập $f(X) = \sqrt{g(A)} + XA + A^2$ rồi dò giá trị $f(X)$ hữu tỉ. Một lần dò chưa ra thì cũng nâng hệ số căn lên rồi tiếp tục. Lưu ý, với kiểu nhân tử này ta phải thay đổi hệ

số căn cả bằng số âm nữa thì mới đảm bảo, nghĩa là không chỉ trong đoạn $[1; 5]$ mà cả đoạn $[-5; -1]$. Thực ra nó tùy thuộc vào hệ số căn đó trong PT ban đầu to hay nhỏ.

Còn với dạng $\left[ax + b + c\sqrt{g(x)} + d\sqrt{h(x)} \right]$, ý tưởng tương tự như trên: nhập

$f(X) = \sqrt{g(A)} + X\sqrt{h(A)} + A$, rồi cũng thay đổi hệ số của $\sqrt{g(A)}$ trong cả 2 đoạn $[1; 5]$ và $[-5; -1]$

- **Kỹ thuật 5: Chia biểu thức vô tỉ bằng CASIO.**

Đây là cả một nghệ thuật! Có khá nhiều tài liệu viết về những cách khác nhau để chia biểu thức từ 1 biến đến 2 biến mà bạn có thể tìm đọc, nhưng tựu chung đều là phải thay giá trị biến phù hợp với căn rồi phân tích, đánh giá cái kết quả thu được. Thành viên Đỗ Hoàng Việt của VNC Team (facebook.com/viet.kynl.771) đã sáng tạo ra một cách chia mới, đó là sử dụng MODE số phức. Phương pháp này khắc phục được một số khó khăn có thể gặp phải khi thay giá trị biến, do giá trị có thể bị giới hạn bởi điều kiện. Phương pháp này được nói kỹ hơn trong một tài liệu riêng của Team.

- **Kỹ thuật 6: Phân tích đa thức 2 biến thành nhân tử.**

Đây là một kỹ thuật hết sức thông dụng, không ai sử dụng CASIO mà không biết, nên các bạn có thể dễ dàng search Google nếu chưa biết!

- **Kỹ thuật 7: Phương pháp ép tích.**

Hiểu nôm na đây là tập hợp những cách thức để phân tích PT vô tỉ thành nhân tử, vì vậy có rất nhiều cách khác nhau. Trong những bài tập phía dưới các bạn sẽ được biết một vài cách đơn giản. Ngoài ra, các bạn có thể tham khảo cuốn “Phương pháp ép tích” của chính tác giả phương pháp (Phạm Quốc Đông) để nắm rõ hơn bản chất của phương pháp này.

BÀI I

$$x^2 - x - 2 = \sqrt{3-x} + \sqrt{x}$$

ĐK: $2 < x \leq 3$

Solve thấy chỉ có 1 nghiệm: $X = 2,618033989 \rightarrow A$ (lưu vào A).

Sử dụng TABLE với $f(X) = \sqrt{3-A} + XA$ và $\begin{cases} \text{Start} = -14 \\ \text{End} = 14 \\ \text{Step} = 1 \end{cases}$ ta dò giá trị nguyên, tìm

được $f(-1) = -2 \Rightarrow \sqrt{3-A} - A = -2$ hay $[\sqrt{3-x} - (x-2)]$ là biểu thức liên hợp chứa nghiệm A

Tương tự, với $\sqrt{x}$, ta sửa $f(X) = \sqrt{A} + XA$, được biểu thức liên hợp $[\sqrt{x} - (x-1)]$

Ngoài ra, với $f(X) = \sqrt{3-A} + X\sqrt{A}$ ta còn tìm được nhân tử $(\sqrt{3-x} - \sqrt{x} + 1)$

- **Cách 1. Liên hợp trực tiếp.**

$$PT \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 + [(x-2) - \sqrt{3-x}] + [(x-1) - \sqrt{x}] = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 + \frac{x^2 - 3x + 1}{x-2 + \sqrt{3-x}} + \frac{x^2 - 3x + 1}{x-1 + \sqrt{x}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 3x + 1) \left(1 + \frac{1}{x-2 + \sqrt{3-x}} + \frac{1}{x-1 + \sqrt{x}} \right) = 0$$

$$\text{Xét ĐK dễ thấy } 1 + \frac{1}{x-2 + \sqrt{3-x}} + \frac{1}{x-1 + \sqrt{x}} > 0$$

- **Cách 2. Ép tích trực tiếp bằng chia căn.**

Ta sẽ chia $\frac{\sqrt{3-x} + \sqrt{x} - x^2 + x + 2}{\sqrt{3-x} - \sqrt{x} + 1} = g(x)$ để tìm nhân tử còn lại $g(x)$

Vì PT đã cho có bậc 2, mà nhân tử chia có bậc $\frac{1}{2}$, nên $g(x)$ sẽ có bậc $2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, do đó về dạng của $g(x)$, thì sẽ là $(a_1x + b_1)\sqrt{3-x} + (a_2x + b_2)\sqrt{x} + a\sqrt{x(3-x)} + bx + c$, không phải là nhỏ. Vì vậy, phép chia này khá táo bạo, nhưng một khi đã biết dạng, việc chia sẽ luôn dễ hơn khi chia mò.

Ở đây ta có $x \in [0; 3]$, gán $X = 0$ vào $g(X)$ ta được $g(0) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$, mà $g(0)$ theo dạng trên chính là $b_1\sqrt{3} + c$, suy ra $b_1 = c = \frac{1}{2}$. Tiếp theo, ta tính $g(3) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{3}$, đối

chiếu với $g(3) = (3a_2 + b_2)\sqrt{3} + 3b + \frac{1}{2}$ ta được $\begin{cases} b = 0 \\ b_2 = \frac{3}{2} - 3a_2 \end{cases}$, đến đây ta đã thu được

$$g(x) = \left(a_1x + \frac{1}{2}\right)\sqrt{3-x} + \left(a_2x + \frac{3}{2} - 3a_2\right)\sqrt{x} + a\sqrt{x(3-x)} + \frac{1}{2}$$

Lần lượt cho nốt $X=1, X=2$ ta được $g(1) = 1 + \frac{3}{2}\sqrt{2}$, $g(2) = 2 + \frac{3}{2}\sqrt{2}$, ứng với

$$2 - 2a_2 + \left(a_1 + a + \frac{1}{2}\right)\sqrt{2} \text{ và } 2a_1 + 1 + \left(a - a_2 + \frac{3}{2}\right)\sqrt{2}, \text{ do đó } a = a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy: } PT \Leftrightarrow (\sqrt{3-x} - \sqrt{x} + 1) \left[\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right)\sqrt{3-x} + \frac{x}{2}\sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x(3-x)} + \frac{1}{2} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3-x} - \sqrt{x} + 1) \left[(x+1)\sqrt{3-x} + x\sqrt{x} + \sqrt{x(3-x)} + 1 \right] = 0$$

• **Cách 3. Đặt 1 ẩn phụ.**

$$\text{Đặt } \sqrt{x} = t \geq 0 \Leftrightarrow x = t^2 \Rightarrow PT: t^4 - t^2 - t - 2 = \sqrt{3-t^2} \quad (\sqrt{2} < t \leq \sqrt{3}).$$

Lúc này ta có nghiệm $t = \sqrt{x} = \sqrt{A} = 1,618033989 \rightarrow B$

Tìm biểu thức liên hợp căn, vào TABLE cho $f(X) = \sqrt{3-B^2} + XB$, ta thu được

$$f(-1) = -1 \Rightarrow \sqrt{3-B^2} - B = -1 \Rightarrow \left[(t-1) - \sqrt{3-t^2} \right] \text{ là biểu thức cần tìm.}$$

Do đó, ta biến đổi:

$$t^4 - t^2 - 2t - 1 + \left(t - 1 - \sqrt{3-t^2} \right) = 0 \Leftrightarrow (t^2 - t - 1)(t^2 + t + 1) + \left(t - 1 - \sqrt{3-t^2} \right) = 0 \quad (*)$$

• **Cách nhỏ 3.1. Liên hợp gián tiếp.**

$$(*) \Leftrightarrow (t^2 - t - 1)(t^2 + t + 1) + \frac{2(t^2 - t - 1)}{t - 1 + \sqrt{3-t^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (t^2 - t - 1) \left(t^2 + t + 1 + \frac{2}{t - 1 + \sqrt{3-t^2}} \right) = 0$$

$$\text{Rõ ràng } t^2 + t + 1 + \frac{2}{t - 1 + \sqrt{3-t^2}} > 0 \quad \forall t \in (\sqrt{2}; \sqrt{3}]$$

• **Cách nhỏ 3.2. Ép tích gián tiếp.**

$$(*) \Leftrightarrow (t^2 + t + 1)(t - 1 - \sqrt{3-t^2})(t - 1 + \sqrt{3-t^2}) + 2(t - 1 - \sqrt{3-t^2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (t - 1 - \sqrt{3-t^2}) \left[(t^2 + t + 1)(t - 1 + \sqrt{3-t^2}) + 2 \right] = 0$$

$$\Rightarrow (\sqrt{x} - \sqrt{3-x} - 1) \left[(x + 1 + \sqrt{x})(\sqrt{x} + \sqrt{3-x} - 1) + 2 \right] = 0$$

$$\text{Để thấy } (x + 1 + \sqrt{x})(\sqrt{x} + \sqrt{3-x} - 1) + 2 > 0 \quad \forall x \in (2; 3]$$

Nếu đặt $\sqrt{3-x} = t$ việc biến đổi hoàn toàn tương tự, vì vai trò 2 căn là ngang nhau.

• **Cách nhỏ 3.3. Bình phương gián tiếp, triệt căn.**

$$PT \Leftrightarrow (t^4 - t^2 - t - 2)^2 = 3 - t^2 \Leftrightarrow (t^2 - t - 1)(t^6 + t^5 - t^3 - 4t^2 - 3t - 1) = 0$$

Solve PT $t^6 + t^5 - t^3 - 4t^2 - 3t - 1 = 0$ ta được nghiệm $t = 1,476282537 \in (\sqrt{2}; \sqrt{3}]$,

nhưng nghiệm này không thỏa mãn PT $t^4 - t^2 - t - 2 = \sqrt{3 - t^2}$, nguyên do là điều

kiện $\sqrt{2} < t \leq \sqrt{3}$ ban đầu ta đặt là chưa đúng (vì suy trực tiếp qua phép đặt $\sqrt{x} = t$),

dễ thấy điều đó vì $(t^4 - t^2 - t - 2)|_{t=\sqrt{2}} = -\sqrt{2} < 0$. Vì vậy điều kiện đúng của PT ẩn t

trên phải là $\sqrt{2} < t_0 \leq t \leq \sqrt{3}$ với t_0 là nghiệm dương trong số 2 nghiệm của PT

$t^4 - t^2 - t - 2 = 0$ (nghiệm này rất xấu!).

Ta có thể lợi dụng nghiệm t_0 này vào việc chứng minh đa thức bậc 6 kia (gọi là $f(t)$)

vô nghiệm như sau: đầu tiên ta chia có dư $\frac{t^6 + t^5 - t^3 - 4t^2 - 3t - 1}{t^4 - t^2 - t - 2}$ bằng CASIO. Gán

$t = 100$ vào phép chia ta được 10101,01, phần nguyên là $10101 = t^2 + t + 1$, do đó sửa

biểu thức trên màn hình thành $\left(\frac{t^6 + t^5 - t^3 - 4t^2 - 3t - 1}{t^4 - t^2 - t - 2} - t^2 - t - 1 \right) (t^4 - t^2 - t - 2)$,

bấm $\boxed{=}$ ta được 1000001 $= t^3 + 1$, vậy: $\frac{f(t)}{t^4 - t^2 - t - 2} = t^2 + t + 1 + \frac{t^3 + 1}{t^4 - t^2 - t - 2}$, nghĩa

là ta có phân tích như sau: $t^6 + t^5 - t^3 - 4t^2 - 3t - 1 = (t^2 + t + 1)(t^4 - t^2 - t - 2) + t^3 + 1$

Vì $t_0^4 - t_0^2 - t_0 - 2 = 0$ nên $f(t_0) = t_0^3 + 1$, mặt khác $t_0 > \sqrt{2}$ nên $f(t_0) > 0$, do đó PT bậc 6 $f(t) = 0$ vô nghiệm.

Vậy ta sẽ trình bày như thế nào? Ta có thể viết như sau:

Đặt... PT trở thành $t^4 - t^2 - t - 2 = \sqrt{3 - t^2}$ ($\sqrt{2} < t \leq \sqrt{3}$), mặt khác ta phải có

$g(t) = t^4 - t^2 - t - 2 \geq 0$. Và vì $g(\sqrt{2})g(\sqrt{3}) < 0$ nên PT $t^4 - t^2 - t - 2 = 0$ có nghiệm

$t_0 \in (\sqrt{2}; \sqrt{3}]$

Lại có: với $\{t_1, t_2\} \in (\sqrt{2}; \sqrt{3}]$ và $t_1 > t_2$, ta thấy:

$$g(t_1) - g(t_2) = (t_1^4 - t_2^4) - (t_1^2 - t_2^2) - (t_1 - t_2) = (t_1 - t_2) \left[(t_1 + t_2)(t_1^2 + t_2^2 - 1) - 1 \right] > 0, \text{ do đó}$$

$$g(t_1) > g(t_2) \Rightarrow g(t) \text{ đồng biến } \forall t \in (\sqrt{2}; \sqrt{3}]. \text{ Vậy } g(t) \geq 0 = g(t_0) \Leftrightarrow t \geq t_0, \text{ nên điều}$$

kiện chính xác của t là $t_0 \leq t \leq \sqrt{3} \dots$

Ta có: $f(t) = t^6 + t^5 - t^3 - 4t^2 - 3t - 1 = (t^2 + t + 1)g(t) + t^3 + 1$ nên $f(t)$ đồng biến (vì

các hàm $t^2 + t + 1$, $g(t)$, $t^3 + 1$ đồng biến $\forall t \in [t_0; \sqrt{3}]$), do đó với $t \geq t_0$ ta có

$$f(t) > f(t_0) = t_0^3 + 1 > 0. \text{ Suy ra PT } f(t) = 0 \text{ vô nghiệm. Xong!}$$

• Cách 4. Bình phương trực tiếp.

• Cách nhỏ 4.1. Bình phương 1 lần, dồn căn.

$$PT \Rightarrow (x^2 - x - 2)^2 = 3 + 2\sqrt{x(3-x)} \Leftrightarrow x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 1 - 2\sqrt{x(3-x)} = 0 \quad (*)$$

Vì $\sqrt{x(3-x)} \Big|_{x=A} = 1 \Rightarrow [\sqrt{x(3-x)} - 1]$ là nhân tử của PT mới này. Do đó ta có thể

liên hợp, hoặc ép tích trực tiếp dễ dàng hơn PT ban đầu:

$$PT \Leftrightarrow (x^2 + x - 1)(x^2 - 3x + 1) + 2(1 - \sqrt{3x - x^2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + x - 1)(1 - \sqrt{3x - x^2})(1 + \sqrt{3x - x^2}) + 2(1 - \sqrt{3x - x^2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - \sqrt{3x - x^2}) \left[(x^2 + x - 1)(1 + \sqrt{3x - x^2}) + 2 \right] = 0$$

Dễ thấy $(x^2 + x - 1)(1 + \sqrt{3x - x^2}) + 2 > 0 \quad \forall x \in (2; 3]$

• Cách nhỏ 4.2. Bình phương triệt để.

$$(*) \Leftrightarrow x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 1 = 2\sqrt{x(3-x)} \Leftrightarrow (x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 1)^2 = 4x(3-x) \\ \Leftrightarrow (x^2 - 3x + 1)(x^6 - x^5 - 6x^4 + 3x^3 + 10x^2 - x + 1) = 0$$

Việc chứng minh $x^6 - x^5 - 6x^4 + 3x^3 + 10x^2 - x + 1 = 0$ vô nghiệm giống hệt **Cách nhỏ 3.3**, vì PT trong cách đây chỉ là hệ quả của PT này qua việc đặt ẩn mà thôi. Solve ta cũng thấy PT ở đây có 1 nghiệm trong $(2; 3]$ là $x = 2,17940999397953$, do đó cách chứng minh tương tự.

Sau khi bình ta có thêm ĐK $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 1 > 0$, tìm ĐK của nó xem ra dễ hơn

Cách nhỏ 3.3 vì ta phân tích được: $(x^2 - x - 2 + \sqrt{3})(x^2 - x - 2 - \sqrt{3}) > 0$, suy ra ĐK

hoàn chỉnh là: $\frac{1 + \sqrt{9 + 4\sqrt{3}}}{2} < x < 3$

Mặt khác: $f(x) = (x^2 + x - 1)(x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 1) + 2x^2 + 2x + 2$ ($f(x)$ là đa thức bậc 6 đang xử lí), do đó $f(x)$ đồng biến, suy ra $\forall x \in \left(\frac{1 + \sqrt{9 + 4\sqrt{3}}}{2}; 3\right)$ ta có

$$f(x) > f\left(\frac{1 + \sqrt{9 + 4\sqrt{3}}}{2}\right) = 2\left(\frac{1 + \sqrt{9 + 4\sqrt{3}}}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{1 + \sqrt{9 + 4\sqrt{3}}}{2}\right) + 2 > 0$$

Vậy PT $x^6 - x^5 - 6x^4 + 3x^3 + 10x^2 - x + 1 = 0$ vô nghiệm.

Nói chung, cách bình phương luôn có tác dụng với những dạng PT như thế này (thậm chí 2 căn cũng ok), ta có thể bình phương một cách tự do, không lo điều kiện. Thực ra nếu điều kiện dễ dàng nhìn ra thì nên ghi vào, còn không thì cứ bình phương rồi thử lại nghiệm. Tuy nhiên, các bạn có thể bị... tạch nếu không biết chứng minh đa thức vô nghiệm qua điều kiện trực tiếp hoặc gián tiếp.

BÀI II

$$3x - 10 + 3\sqrt{2+x} - 6\sqrt{2-x} + 4\sqrt{4-x^2} = 0$$

$$\text{ĐK: } -2 \leq x \leq 2$$

$$\text{Solve được 1 nghiệm đơn } X = \frac{6}{5}$$

Dùng TABLE dò giá trị $f(X)$ nguyên, với $f(X) = \sqrt{2 + \frac{6}{5} + X} \sqrt{2 - \frac{6}{5}}$, ta được

$$f(-2) = 0 \Rightarrow \sqrt{2 + \frac{6}{5}} - 2\sqrt{2 - \frac{6}{5}} = 0, \text{ do đó nghiệm tìm được là nghiệm của nhân tử } (\sqrt{2+x} - 2\sqrt{2-x})$$

- Cách 1. Liên hợp trực tiếp.

$$PT \Leftrightarrow 3(\sqrt{2+x} - 2\sqrt{2-x}) + [4\sqrt{4-x^2} - (10-3x)] = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(5x-6)}{\sqrt{2+x} + 2\sqrt{2-x}} - \frac{(5x-6)^2}{4\sqrt{4-x^2} - 3x + 10} = 0$$

$$\Leftrightarrow (5x-6) \left(\frac{3}{\sqrt{2+x} + 2\sqrt{2-x}} + \frac{6-5x}{4\sqrt{4-x^2} - 3x + 10} \right) = 0$$

$$\text{Dễ dàng chứng minh } \frac{3}{\sqrt{2+x} + 2\sqrt{2-x}} + \frac{6-5x}{4\sqrt{4-x^2} - 3x + 10} > 0 \quad \forall x \in [-2; 2]$$

- Cách 2. Ép tích trực tiếp.

- Cách nhỏ 2.1. Ép tích bằng phân tích.

$$PT \Leftrightarrow [(2+x) - 2\sqrt{2+x} \cdot 2\sqrt{2-x} + 4(2-x)] - 3(\sqrt{2+x} - 2\sqrt{2-x}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2+x} - 2\sqrt{2-x})^2 - 3(\sqrt{2+x} - 2\sqrt{2-x}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2+x} - 2\sqrt{2-x})(\sqrt{2+x} - 2\sqrt{2-x} - 3) = 0$$

• **Cách nhỏ 2.2. Ép tích bằng chia căn.**

Ta sẽ chia $g(x) = \frac{3x-10+3\sqrt{2+x}-6\sqrt{2-x}+4\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{2+x}-2\sqrt{2-x}}$ để tìm nhân tử còn lại.

Đánh giá 1 chút: PT đã cho có bậc 1, nhân tử $(\sqrt{2+x}-2\sqrt{2-x})$ có bậc $\frac{1}{2}$, do đó

$g(x)$ (nhân tử còn lại) sẽ có bậc $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Mà bậc của $\sqrt{2+x}, \sqrt{2-x}$ là $\frac{1}{2}$, suy ra

$g(x)$ sẽ có dạng $(a\sqrt{2+x} + b\sqrt{2-x} + c)$. Như vậy, việc chia sẽ rất đơn giản.

Để tìm a , gán $X=1$ ta được $g(1) = 5 - \sqrt{3} = 5 - \sqrt{2+1} \Rightarrow a = -1$. Do đó sửa lại

$$g(X) = \frac{3X-10+3\sqrt{2+X}-6\sqrt{2-X}+4\sqrt{4-X^2}}{\sqrt{2+X}-2\sqrt{2-X}} + \sqrt{2+X}$$

Lúc này, gán tiếp $X=-1$ ta được $g(-1) = 3 + 2\sqrt{3} = 3 + 2\sqrt{2-1} \Rightarrow b = 2$. Vì chỉ còn lại hệ số cuối cùng là c , nên gán 1 giá trị $X \in [-2; 2]$ bất kì vào biểu thức

$$\frac{3X-10+3\sqrt{2+X}-6\sqrt{2-X}+4\sqrt{4-X^2}}{\sqrt{2+X}-2\sqrt{2-X}} + \sqrt{2+X} - 2\sqrt{2-X}, \text{ ta sẽ tìm được } c = 3$$

Vậy nhân tử còn lại là $(2\sqrt{2-x} - \sqrt{2+x} - 3)$. Kết luận:

$$PT \Leftrightarrow (\sqrt{2+x} - 2\sqrt{2-x})(2\sqrt{2-x} - \sqrt{2+x} - 3) = 0$$

• **Cách 3. Đặt 1 ẩn phụ.**

Đặt $\sqrt{2+x} = t \geq 0 \Leftrightarrow x = t^2 - 2$, khi đó nghiệm $t = \sqrt{2+\frac{6}{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5} \rightarrow A$, PT đã cho trở

$$\text{thành: } 3t^2 + 3t - 16 - 6\sqrt{4-t^2} + 4\sqrt{4t^2-t^4} = 0$$

Dùng TABLE duyệt giá trị đẹp của $f(X) = \sqrt{4A^2 - A^4} + XA$ ta được $f(0) = \frac{8}{5}$, nghĩa

là $\sqrt{4A^2 - A^4} = \frac{8}{5} \Rightarrow (5\sqrt{4t^2 - t^4} - 8)$ là biểu thức liên hợp cho $\sqrt{4t^2 - t^4}$

Tương tự, biểu thức liên hợp cho $\sqrt{4 - t^2}$ là $(2\sqrt{4 - t^2} - t)$

• **Cách nhỏ 3.1. Liên hợp gián tiếp.**

$$PT \Leftrightarrow 15t^2 + 15t - 80 - 30\sqrt{4 - t^2} + 20\sqrt{4t^2 - t^4} = 0$$

$$\Leftrightarrow 15t^2 - 48 + 15(t - 2\sqrt{4 - t^2}) + 4(5\sqrt{4t^2 - t^4} - 8) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3(5t^2 - 16) + \frac{15(5t^2 - 16)}{t + 2\sqrt{4 - t^2}} + \frac{4(5t^2 - 16)(4 - 5t^2)}{5\sqrt{4t^2 - t^4} + 8} = 0$$

$$\Leftrightarrow (5t^2 - 16) \left(3 + \frac{15}{t + 2\sqrt{4 - t^2}} + \frac{16 - 20t^2}{5\sqrt{4t^2 - t^4} + 8} \right) = 0$$

• **Cách nhỏ 3.2. Ép tích gián tiếp.**

$$PT \Leftrightarrow 5t^2 - 16 + 3(t - 2\sqrt{4 - t^2}) + 2t(2\sqrt{4 - t^2} - t) = 0$$

$$\Leftrightarrow (t - 2\sqrt{4 - t^2})(t + 2\sqrt{4 - t^2}) + 3(t - 2\sqrt{4 - t^2}) - 2t(t - 2\sqrt{4 - t^2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (t - 2\sqrt{4 - t^2})(3 - t + 2\sqrt{4 - t^2}) = 0$$

$$\Rightarrow (\sqrt{2 + x} - 2\sqrt{2 - x})(2\sqrt{2 - x} - \sqrt{2 + x} + 3) = 0$$

• **Cách 4. Đặt 2 ẩn phụ, ép tích gián tiếp.**

Đầu tiên, tách $3x - 10 = a(2 + x) + b(2 - x)$, ta có $\begin{cases} a - b = 3 \\ 2a + 2b = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -4 \end{cases}$, do đó:

$$PT \Leftrightarrow (2 + x) + 4(2 - x) - 4\sqrt{2 + x}\sqrt{2 - x} - 3\sqrt{2 + x} + 6\sqrt{2 - x} = 0$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} \sqrt{2+x} = u \geq 0 \\ \sqrt{2-x} = v \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \text{PT: } u^2 + 4v^2 - 4uv - 3u + 6v = 0 \Leftrightarrow (u-2v)(u-2v-3) = 0$$

$$\Rightarrow (\sqrt{2+x} - 2\sqrt{2-x})(\sqrt{2+x} - 2\sqrt{2-x} - 3) = 0$$

PHẠM QUỐC ĐÔNG

EPTICH.COM

Viet Nam CASIOer Team

BÀI III

$$3x + 3 + 2\sqrt{(x+2)^3} - (x+5)\sqrt{2x+1} - 2\sqrt{2x^2 + 5x + 2} = 0$$

$$\text{ĐK: } x \geq -\frac{1}{2}$$

Solve chỉ được 1 nghiệm nguyên $x=1 \Rightarrow \begin{cases} \left[2\sqrt{(x+2)^3} - (x+5)\sqrt{2x+1} \right]_{x=1} = 0 \\ \left[\sqrt{2x^2 + 5x + 2} \right]_{x=1} = 3 \end{cases}$, như

vậy trước hết ta thấy có thể liên hợp 2 biểu thức: $\left[2\sqrt{(x+2)^3} - (x+5)\sqrt{2x+1} \right]$ và $(\sqrt{2x^2 + 5x + 2} - 3)$

Nhưng hết sức lưu ý rằng, vì $\frac{d}{dx}(f(X)) \Big|_{x=1} = 0$ nên $x=1$ có thể là nghiệm kép, ta có thể kiểm tra một cách chắc chắn điều đó bằng cách sử dụng TABLE để đánh giá.

Nhập $f(X) = 3X + 3 + 2\sqrt{(X+2)^3} - (X+5)\sqrt{2X+1} - 2\sqrt{2X^2 + 5X + 2}$ vào TABLE,

cho $\begin{cases} \text{Start} = -0,5 \\ \text{End} = 3 \\ \text{Step} = \frac{3,5}{29} \end{cases}$ (vì $x \geq -\frac{1}{2}$), và xét sự biến thiên của $f(X)$ xung quanh điểm $X=1$

Ta thấy tại 2 giá trị $\begin{cases} X = 0,9482758621 \\ X = 1,068965517 \end{cases}$ (gần $X=1$ nhất) thì 2 giá trị $f(X)$ cũng là

nhỏ nhất trong bảng, do đó $X=1$ là 1 cực tiểu, và như vậy nó chính là nghiệm kép.

- Cách 1. Liên hợp trực tiếp.**

Nhận thấy $2\sqrt{(x+2)^3} - (x+5)\sqrt{2x+1} = \frac{(x-1)^2(2x+7)}{2\sqrt{(x+2)^3} + (x+5)\sqrt{2x+1}}$ đã thỏa mãn

nghiệm kép rồi, do đó ta chỉ phải lo bên $\sqrt{2x^2 + 5x + 2}$ nữa là ổn.

Rõ ràng nếu liên hợp $\sqrt{2x^2 + 5x + 2}$ với 1 số thì không thể ra dạng $\alpha(x-1)^2$ được, với bậc 2 thì lại quá lớn, vì vậy, ta thử liên hợp luôn nó với phần còn lại của PT xem

$$\text{sao: } 3x + 3 - 2\sqrt{2x^2 + 5x + 2} = \frac{(x-1)^2}{3x + 3 + 2\sqrt{2x^2 + 5x + 2}}. \text{ Ok quá ngon!}$$

$$\begin{aligned} PT &\Leftrightarrow (3x + 3 - 2\sqrt{2x^2 + 5x + 2}) + \left[2\sqrt{(x+2)^3} - (x+5)\sqrt{2x+1} \right] = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2 \left[\frac{1}{3x + 3 + 2\sqrt{2x^2 + 5x + 2}} + \frac{2x+7}{2\sqrt{(x+2)^3} + (x+5)\sqrt{2x+1}} \right] = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Dễ thấy } \frac{1}{3x + 3 + 2\sqrt{2x^2 + 5x + 2}} + \frac{2x+7}{2\sqrt{(x+2)^3} + (x+5)\sqrt{2x+1}} > 0 \quad \forall x \geq -\frac{1}{2}$$

Cách liên hợp này thể hiện 1 điều: trong bài toán có nhiều căn khác nhau, ta có thể chỉ cần nhóm các biểu thức của từng căn lại với nhau là ra biểu thức liên hợp.

- **Cách 2. Đặt 1 ẩn phụ.**

Giả sử ta đặt $\sqrt{2x+1} = t \geq 0 \Leftrightarrow x = \frac{t^2-1}{2}$, nghiệm $t = \sqrt{3} \rightarrow A$, PT đã cho trở thành:

$$t^3 - 3t^2 + 9t - 3 + 2t\sqrt{2t^2 + 6} - \sqrt{2(t^2 + 3)^3} = 0$$

$$\text{Nhận thấy: } \begin{cases} \left. \sqrt{2t^2 + 6} \right|_{t=\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} = 2t \\ \left. \sqrt{2(t^2 + 3)^3} \right|_{t=\sqrt{3}} = 12\sqrt{3} = 4t^3 \end{cases}, \text{ nhưng lưu ý } t = \sqrt{3} \text{ là nghiệm kép nên để}$$

liên hợp ta phải tách khôn khéo như sau:

$$PT \Leftrightarrow \left[(3t^2 + 3) - 2t\sqrt{2t^2 + 6} \right] + \left[\sqrt{2(t^2 + 3)^3} - (t^3 + 9t) \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(t^2-3)^2}{3t^2+3+2t\sqrt{2t^2+6}} + \frac{(t^2+6)(t^2-3)^2}{\sqrt{2(t^2+3)^3+t^3+9t}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (t^2-3)^2 \left[\frac{1}{3t^2+3+2t\sqrt{2t^2+6}} + \frac{t^2+6}{\sqrt{2(t^2+3)^3+t^3+9t}} \right] = 0$$

Ngoài ra, ta có thể đặt $\sqrt{x+2}=t \geq 0 \Rightarrow$ nghiệm $t=\sqrt{3} \rightarrow A$, PT trở về dạng có vẻ dễ hơn trước: $2t^3+3t^2-3-(t^2+2t+3)\sqrt{2t^2-3}=0$

Sử dụng TABLE với $f(X)=\sqrt{2A^2-3}+XA$, dễ dàng có $f(-1)=0 \Rightarrow (\sqrt{2t^2-3}-t)$ là 1 nhân tử của PT. Đây chính là cái lợi thứ nhất của việc đặt 1 ẩn phụ, đó là chuyển từ nghiệm nguyên thành nghiệm xấu, nhờ đó khiến cho TABLE đang từ bất lực trở thành có thể áp dụng được.

- **Cách nhỏ 2.1. Liên hợp gián tiếp.**

$$PT \Leftrightarrow t^3+t^2-3t-3-(t^2+2t+3)(\sqrt{2t^2-3}-t)=0$$

$$\Leftrightarrow (t+1)(t^2-3) - \frac{(t^2+2t+3)(t^2-3)}{\sqrt{2t^2-3}+t} = 0$$

$$\Leftrightarrow (t^2-3) \left(t+1 - \frac{t^2+2t+3}{\sqrt{2t^2-3}+t} \right) = 0$$

$$t+1 - \frac{t^2+2t+3}{\sqrt{2t^2-3}+t} = 0 \Leftrightarrow (t+1)\sqrt{2t^2-3} = t+3 \Leftrightarrow (t+1)^2(2t^2-3) = (t+3)^2$$

$$\Leftrightarrow t^4+2t^3-t^2-6t-6=0 \Leftrightarrow (t^2-3)(t^2+2t+2)=0$$

Hoặc liên hợp lần 2 (tới cùng) luôn:

$$(t+1)\sqrt{2t^2-3}=t+3$$

$$\Leftrightarrow t^2-3+(t+1)(\sqrt{2t^2-3}-t)=0 \Leftrightarrow (t^2-3)\left(1+\frac{t+1}{\sqrt{2t^2-3}+t}\right)=0$$

Như vậy nếu gộp 2 liên hợp này vào chung 1 chuỗi biến đổi thì ta được:

$$PT \Leftrightarrow \frac{(t^2-3)^2(2t+1+\sqrt{2t^2-3})}{(\sqrt{2t^2-3}+t)^2}=0 \Rightarrow \frac{(x-1)^2(2\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+1}+1)}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+1})^2}=0$$

• **Cách nhỏ 2.2. Ép tích gián tiếp từ liên hợp ngược.**

$$PT \Leftrightarrow (t+1)(t^2-3)-(t^2+2t+3)(\sqrt{2t^2-3}-t)=0$$

$$\Leftrightarrow (t+1)(\sqrt{2t^2-3}-t)(\sqrt{2t^2-3}+t)-(t^2+2t+3)(\sqrt{2t^2-3}-t)=0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2t^2-3}-t)\left[(t+1)(\sqrt{2t^2-3}+t)-(t^2+2t+3)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2t^2-3}-t)\left[(t+1)(\sqrt{2t^2-3}-t)+t^2-3\right]=0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2t^2-3}-t)\left[(t+1)(\sqrt{2t^2-3}-t)+(\sqrt{2t^2-3}-t)(\sqrt{2t^2-3}+t)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2t^2-3}-t)^2(\sqrt{2t^2-3}+2t+1)=0$$

• **Cách nhỏ 2.3. Ép tích gián tiếp bằng chia căn.**

TABLE cho ta biết nhân tử $(\sqrt{2t^2-3}-t)$, nhờ đó, việc có nghiệm kép lại cho biết

tiếp nhân tử chính xác là $(\sqrt{2t^2-3}-t)^2$, vì vậy, ta sẽ sử dụng kỹ thuật chia căn để

$$\text{tìm nhân tử còn lại: } g(t) = \frac{2t^3+3t^2-3-(t^2+2t+3)\sqrt{2t^2-3}}{(\sqrt{2t^2-3}-t)^2}$$

Nhận xét trước khi chia: PT có bậc 3, còn nhân tử chia có bậc 2, như vậy $g(t)$ sẽ có bậc 1 $\Rightarrow g(t)$ có dạng $(a\sqrt{2t^2-3}+bt+c)$

Nhập $g(X)$ vào máy, cho $X=2$ ta được $g(2)=5+\sqrt{5}=5+\sqrt{2X^2-3} \Rightarrow a=1$, do đó,

xét biểu thức $\frac{2X^3+3X^2-3-(X^2+2X+3)\sqrt{2X^2-3}}{(\sqrt{2X^2-3}-X)^2}-\sqrt{2X^2-3}=bX+c$, gán

$$X=1000 \text{ ta được kết quả } 2001=2X+1 \Rightarrow \begin{cases} b=2 \\ c=1 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } PT \Leftrightarrow (\sqrt{2t^2-3}-t)^2(\sqrt{2t^2-3}+2t+1)=0$$

$$\Rightarrow (\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+2})^2(\sqrt{2x+1}+2\sqrt{x+2}+1)=0$$

Cái lợi thứ 2 của việc đặt 1 ẩn là đây: ép tích dễ dàng hơn để nguyên 2 ẩn.

• **Cách 3. Đặt 2 ẩn phụ, ép tích gián tiếp.**

Đặt $\begin{cases} \sqrt{x+2}=u \geq 0 \\ \sqrt{2x+1}=v \geq 0 \end{cases}$, PT đã cho trở thành: $u^2+v^2+2u^3-(3u^2-v^2)v-2uv=0$, hay

$$2u^3+v^3-3u^2v+u^2+v^2-2uv=0 \Leftrightarrow (u-v)^2(2u+v+1)=0$$

$$\Rightarrow (\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+1})^2(2\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+1}+1)=0, \text{ như vậy việc ép tích bằng 2 ẩn}$$

phụ trong trường hợp này là nhanh nhất.

BÀI IV

$$x^2 - 2x - 3 + (x-3)\sqrt{1+x} + (2x+3)\sqrt{1-x} + (2x+3)\sqrt{1-x^2} = 0$$

ĐK: $-1 \leq x \leq 1$

Solve được 2 nghiệm đẹp: $\begin{cases} x_1 = -\frac{3}{5} \\ x_2 = 0 \end{cases}$, kiểm tra kỹ hơn lại thấy $x_2 = 0$ chính là nghiệm

kép, do đó tạo nhân tử cần phải khôn khéo hơn.

Nhận thấy tại $x = x_1$ thì $\sqrt{1+x}$ và $\sqrt{1-x}$ vô tỉ, do đó ta sử dụng TABLE với

$$f(X) = \sqrt{1-\frac{3}{5}} + X\sqrt{1+\frac{3}{5}}, \text{ tìm được nhân tử } (2\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}) \text{ chứa nghiệm } -\frac{3}{5}.$$

Ngoài ra vì $x=0$ là nghiệm kép nên có thể giả sử có nhân tử $(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})^2$

Xét $\sqrt{1-x^2}$, nếu giả sử $[\sqrt{1-x^2} - (ax+b)]$ chứa cả 2 nghiệm trên, thì ta dễ dàng tìm

ra nó bằng hệ bậc nhất 2 ẩn: $[3\sqrt{1-x^2} - (x+3)]$, tuy nhiên nếu tạo nhân tử như thế

này, thì chưa bao được nghiệm kép, dẫn đến phải sử dụng liên hợp 2 lần. Nhân tử liên hợp cần tạo trong bài toán này sẽ phải có bậc 3 hoặc 4

Để ý thấy $(x-3)\sqrt{1+x} + (2x+3)\sqrt{1-x} = x^2 - 2x - 3 + (2x+3)\sqrt{1-x^2} = 0$ tại 2

nghiệm tìm được, như vậy là có thể nhóm các biểu thức của từng căn để liên hợp triệt để.

Vừa rồi là các suy đoán hướng làm, bây giờ ta sẽ làm từng cách.

- **Cách 1. Liên hợp trực tiếp.**

$$PT \Leftrightarrow [x^2 - 2x - 3 + (2x+3)\sqrt{1-x^2}] + [(x-3)\sqrt{1+x} + (2x+3)\sqrt{1-x}] = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2(5x+3)(x+1)}{x^2-2x-3-(2x+3)\sqrt{1-x^2}} + \frac{x^2(5x+3)}{(x-3)\sqrt{1+x}-(2x+3)\sqrt{1-x}} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(5x+3) \left[\frac{x+1}{x^2-2x-3-(2x+3)\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{(x-3)\sqrt{1+x}-(2x+3)\sqrt{1-x}} \right] = 0$$

Để thấy $\frac{x+1}{x^2-2x-3-(2x+3)\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{(x-3)\sqrt{1+x}-(2x+3)\sqrt{1-x}} < 0 \quad \forall x \in [-1; 1]$

Ta thử liên hợp theo nhân tử $\left[3\sqrt{1-x^2} - (x+3) \right]$ xem sao:

$$PT \Leftrightarrow 5x^2 + 3x + 3 \left[(x-3)\sqrt{1+x} + (2x+3)\sqrt{1-x} \right] + (2x+3) \left[3\sqrt{1-x^2} - (x+3) \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow x(5x+3) + \frac{3x^2(5x+3)}{(x-3)\sqrt{1+x}-(2x+3)\sqrt{1-x}} - \frac{2x(2x+3)(5x+3)}{3\sqrt{1-x^2}+x+3} = 0$$

$$\Leftrightarrow x(5x+3) \left[1 + \frac{3x}{(x-3)\sqrt{1+x}-(2x+3)\sqrt{1-x}} - \frac{2(2x+3)}{3\sqrt{1-x^2}+x+3} \right] = 0$$

Như vậy nếu ban đầu không đánh giá được nghiệm kép thì liên hợp có thể bế tắc!

- **Cách 2. Ép tích trực tiếp.**
- **Cách nhỏ 2.1. Ép tích bằng phân tách.**

Ép tạo ra những nhân tử như đã suy đoán:

$$PT \Leftrightarrow (x-3)(\sqrt{x+1})^2 + (x-3)\sqrt{1+x} + (2x+3)\sqrt{1-x} + (2x+3)\sqrt{1-x}\sqrt{1+x} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\sqrt{1+x}(1+\sqrt{1+x}) + (2x+3)\sqrt{1-x}(1+\sqrt{1+x}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1+\sqrt{1+x}) \left[(x-3)\sqrt{1+x} + (2x+3)\sqrt{1-x} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (1+\sqrt{1+x}) \left[-\sqrt{1+x}(\sqrt{1-x})^2 + 2\sqrt{1-x}(\sqrt{1+x})^2 + (\sqrt{1-x} - 2\sqrt{1+x}) \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 + \sqrt{1+x}) \left[\sqrt{1-x^2} (2\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}) - (2\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}) \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 + \sqrt{1+x}) (2\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}) (\sqrt{1-x^2} - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 + \sqrt{1+x}) (2\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}) (\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})^2 = 0$$

• **Cách nhỏ 2.2. Ép tích bằng chia căn.**

Ta sẽ làm phép chia
$$\frac{x^2 - 2x - 3 + (x-3)\sqrt{1+x} + (2x+3)\sqrt{1-x} + (2x+3)\sqrt{1-x^2}}{(2\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})^2}$$

Đánh giá: PT đã cho có bậc 2, mẫu của phép chia có bậc $\frac{3}{2}$, vậy nhân tử còn lại sẽ có

bậc $\frac{1}{2}$, nghĩa là có dạng $(a + b\sqrt{1+x} + c\sqrt{1-x})$

Cho $X = -1$ ta được $-\frac{1}{2} = a + 0\sqrt{1-X} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ c = 0 \end{cases}$, do đó sửa lại biểu thức thành

$$\frac{x^2 - 2x - 3 + (x-3)\sqrt{1+x} + (2x+3)\sqrt{1-x} + (2x+3)\sqrt{1-x^2}}{(2\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})^2} + 0,5. \text{ Cho tiếp } X = 1 \text{ ta}$$

được $-\frac{\sqrt{2}}{2} = b\sqrt{1+x} \Rightarrow b = -\frac{1}{2}$

Vậy kết quả là $\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1+x}\right)$, hay:

$$PT \Leftrightarrow (1 + \sqrt{1+x})(2\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})^2 = 0$$

• **Cách 3. Đặt 1 ẩn phụ.**

Vai trò 2 căn ngang nhau, thích đặt cái nào cũng được.

Đặt $\sqrt{1+x} = t \geq 0 \Leftrightarrow x = t^2 - 1$, ta có nghiệm vô tỉ $t = \frac{\sqrt{10}}{5}$ và nghiệm kép $t = 1$, PT

trở thành: $t^4 + t^3 - 4t^2 - 4t + (2t^3 + 2t^2 + t + 1)\sqrt{2-t^2} = 0$

Nhân tử cho nghiệm $t = \frac{\sqrt{10}}{5}$ là $(\sqrt{2-t^2} - 2t)$

Ta có: $PT \Leftrightarrow (t+1)(t^3 - 4t) + (t+1)(2t^2 + 1)\sqrt{2-t^2} = 0$

$$\Leftrightarrow (t+1)\left[t^3 - 4t + (2t^2 + 1)\sqrt{2-t^2}\right] = 0 \Leftrightarrow t^3 - 4t + (2t^2 + 1)\sqrt{2-t^2} = 0 \quad (*)$$

• **Cách nhỏ 3.1. Liên hợp gián tiếp.**

$$(*) \Leftrightarrow 5t^3 - 2t + (2t^2 + 1)(\sqrt{2-t^2} - 2t) = 0 \Leftrightarrow t(5t^2 - 2) - \frac{(2t^2 + 1)(5t^2 - 2)}{\sqrt{2-t^2} + 2t} = 0$$

$$\Leftrightarrow (5t^2 - 2)\left(t - \frac{2t^2 + 1}{\sqrt{2-t^2} + 2t}\right) = 0$$

$$t - \frac{2t^2 + 1}{\sqrt{2-t^2} + 2t} = 0 \Leftrightarrow t\sqrt{2-t^2} = 1 \Leftrightarrow (t^2 - 1)^2 = 0$$

Như vậy đặt 1 ẩn phụ giúp cho kiểu liên hợp nửa chừng như thế này (nghĩa là tất cả các biểu thức trong các ngoặc sau liên hợp đều còn nghiệm) trở nên khả dụng, không lo bế tắc như liên hợp nửa chừng trực tiếp với biến x

• **Cách nhỏ 3.2. Ép tích gián tiếp.**

$$(*) \Leftrightarrow -t(\sqrt{2-t^2})^2 + 2t^2\sqrt{2-t^2} + (\sqrt{2-t^2} - 2t) = 0$$

$$\Leftrightarrow -t(\sqrt{2-t^2})^2 + 2t^2\sqrt{2-t^2} + (\sqrt{2-t^2} - 2t) = 0$$

$$\Leftrightarrow t\sqrt{2-t^2}(2t - \sqrt{2-t^2}) - (2t - \sqrt{2-t^2}) = 0 \Leftrightarrow (2t - \sqrt{2-t^2})(t\sqrt{2-t^2} - 1) = 0$$

$$\Rightarrow (2\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})(\sqrt{1-x^2} - 1) = 0$$

Ta thấy cách ép tích này giống như cách ép trực tiếp, chỉ khác là ta đã triệt tiêu 1 căn bằng cách đặt 1 ẩn phụ, nên nhìn ra nhân tử dễ dàng hơn.

Ngoài ra chia căn cũng dễ hơn.

• Cách nhỏ 3.3. Bình phương triệt căn.

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow t^3 - 4t = -(2t^2 + 1)\sqrt{2-t^2} \Leftrightarrow (t^3 - 4t)^2 = (2t^2 + 1)^2(2-t^2) \\ &\Leftrightarrow (t-1)^2(t+1)^2(5t^2-2) = 0 \end{aligned}$$

• Cách 4. Đặt 2 ẩn phụ.

$$\text{Ta có: } PT \Leftrightarrow (x-3)(x+1) + (x-3)\sqrt{1+x} + (2x+3)\sqrt{1-x} + (2x+3)\sqrt{1+x}\sqrt{1-x} = 0$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} \sqrt{1+x} = u \geq 0 \\ \sqrt{1-x} = v \geq 0 \end{cases}, \text{ PT trở thành:}$$

$$(-u^2 - 2v^2)u^2 + (-u^2 - 2v^2)u + \left(\frac{5}{2}u^2 + \frac{1}{2}v^2\right)v + \left(\frac{5}{2}u^2 + \frac{1}{2}v^2\right)uv = 0$$

$$\Leftrightarrow 2u^4 + 4u^2v^2 - uv^3 - 5u^3v + 2u^3 - v^3 + 4uv^2 - 5u^2v = 0$$

$$\Leftrightarrow (u+1)(2u-v)(u-v)^2 = 0$$

$$\Rightarrow (\sqrt{1+x}+1)(2\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})^2 = 0$$

BÀI V

$$x^4 + x^2 + 10x - 19 + (x^3 - 7x + 13)\sqrt{x^2 + x - 1} = 0$$

$$\text{ĐK: } \begin{cases} x \leq \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \\ x \geq \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Nghiệm Solve được: $x = -2$; $x = 1$, không có nghiệm kép. Thay cả 2 nghiệm này vào căn ta đều được số 1, như vậy nhân tử là $(\sqrt{x^2 + x - 1} - 1)$

• Cách 1. Liên hợp trực tiếp.

$$PT \Leftrightarrow x^4 + x^3 + x^2 + 3x - 6 + (x^3 - 7x + 13)(\sqrt{x^2 + x - 1} - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 3)(x^2 + x - 2) + \frac{(x^3 - 7x + 13)(x^2 + x - 2)}{\sqrt{x^2 + x - 1} + 1} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + x - 2) \left(x^2 + 3 + \frac{x^3 - 7x + 13}{\sqrt{x^2 + x - 1} + 1} \right) = 0$$

$$x^2 + 3 + \frac{x^3 - 7x + 13}{\sqrt{x^2 + x - 1} + 1} = 0 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 7x + 16 + (x^2 + 3)\sqrt{x^2 + x - 1} = 0 \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow x^3 + x^2 - 7x + 16 = -(x^2 + 3)\sqrt{x^2 + x - 1} \Rightarrow (x^3 + x^2 - 7x + 16)^2 = (x^2 + 3)^2(x^2 + x - 1)$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + x - 5)(x^3 - 19x^2 + 36x - 53) = 0$$

Rõ ràng nghiệm của $x^2 + x - 5 = 0$ không thỏa (*), nên ta xét $x^3 - 19x^2 + 36x - 53 = 0$

Giả sử nó có nghiệm $x = x_0$, khi đó ta có:

$$x_0^3 + x_0^2 - 7x_0 + 16 = (x_0^3 - 19x_0^2 + 36x_0 - 53) + (20x_0^2 - 43x_0 + 69)$$

$$= 20x_0^2 - 43x_0 + 69 > 0 \Rightarrow x_0^3 + x_0^2 - 7x_0 + 16 + (x_0^2 + 3)\sqrt{x_0^2 + x_0 - 1} > 0$$

Vậy (*) vô nghiệm.

- Cách 2. Ép tích trực tiếp.
- Cách nhỏ 2.1. Ép tích bằng phân tách.

$$\begin{aligned}
 PT &\Leftrightarrow x^4 + x^3 + x^2 + 3x - 6 + (x^3 - 7x + 13)(\sqrt{x^2 + x - 1} - 1) = 0 \\
 &\Leftrightarrow (x^2 + 3)(x^2 + x - 2) + (x^3 - 7x + 13)(\sqrt{x^2 + x - 1} - 1) = 0 \\
 &\Leftrightarrow (x^2 + 3)(\sqrt{x^2 + x - 1} - 1)(\sqrt{x^2 + x - 1} + 1) + (x^3 - 7x + 13)(\sqrt{x^2 + x - 1} - 1) = 0 \\
 &\Leftrightarrow (\sqrt{x^2 + x - 1} - 1) \left[x^3 + x^2 - 7x + 16 + (x^2 + 3)\sqrt{x^2 + x - 1} \right] = 0
 \end{aligned}$$

Việc chứng minh $x^3 + x^2 - 7x + 16 + (x^2 + 3)\sqrt{x^2 + x - 1} = 0$ vô nghiệm ta đã làm xong ở cách trên!

- Cách nhỏ 2.2. Ép tích bằng chia căn.

Phép chia của chúng ta là $g(x) = \frac{x^4 + x^2 + 10x - 19 + (x^3 - 7x + 13)\sqrt{x^2 + x - 1}}{\sqrt{x^2 + x - 1} - 1}$

Thấy rằng tử có bậc 4, mẫu có bậc 1 nên $g(x)$ sẽ có bậc 3, do đó nó có dạng $ax^3 + bx^2 + cx + d + (mx^2 + nx + p)\sqrt{x^2 + x - 1}$

Ta sẽ tìm $mx^2 + nx + p$ trước, vì nó có 3 hệ số nên ta cần 3 giá trị $g(x)$, ta có:

$$g(2) = 14 + 7\sqrt{5} = 14 + 7\sqrt{x^2 + x - 1}, \quad g(-3) = 19 + 12\sqrt{5} = 19 + 12\sqrt{x^2 + x - 1},$$

$$g\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{89}{8} + \frac{21}{8}\sqrt{11} = \frac{89}{8} + \frac{21}{4}\sqrt{x^2 + x - 1}$$

Vậy ta được:
$$\begin{cases} 4m + 2n + p = 7 \\ 9m - 3n + p = 12 \\ \frac{9}{4}m + \frac{3}{2}n + p = \frac{21}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = 0 \\ p = 3 \end{cases}$$

Suy ra: $ax^3 + bx^2 + cx + d = g(x) - (x^2 + 3)\sqrt{x^2 + x - 1}$, gán $X = 1000$ ta được

$$\left[g(x) - (x^2 + 3)\sqrt{x^2 + x - 1} \right]_{x=1000} = 1000993016 = x^3 + x^2 - 7x + 16$$

Vậy: $PT \Leftrightarrow (\sqrt{x^2 + x - 1} - 1) \left[x^3 + x^2 - 7x + 16 + (x^2 + 3)\sqrt{x^2 + x - 1} \right] = 0$