CHƯƠNG 1. CÁC PHƯƠNG PHÁP TÌM KIẾM

Nguyên lý Heuristic

Thuật giải tham lam

Với những bài toán mà không gian trạng thái có thể phát sinh cực lớn thì việc dùng phương pháp vét cạn là điều không thể. Nguyên lý tham lam lấy tiêu chuẩn tối ưu toàn cục để làm tiêu chuẩn chọn lựa hành động trong phạm vi cục bộ. Một số ví dụ có thể áp dụng nguyên lý này như các bài toán có mô hình toán học là bài toán người bán hàng, bài toán tô màu đồ thị,… Hơn nữa nếu có một chiến lược tham lam hợp lý, thì phương pháp này sẽ tìm được lời giải tối ưu; chẳng hạn thuật toán Kruskal, thuật toán Prim.

Lược đồ của phương pháp tham lam

```
void Greedy(A,S)        { A là tập các ứng cử viên, S là tập nghiệm}
{
        S=ϕ
        while (A ≠ ϕ)
                {
                        x=select(A); { chọn phần tử tốt nhất trong A}
                        A=A - {x}
                        if (S ∪ {x} chấp nhận được)
                                S= S ∪ {x}
                }
}
```

Bài toán hành trình người bán hàng

Có n thành phố (được đánh số từ 1 đến n), một người bán hàng xuất phát từ một thành phố, muốn đi qua các thành phố khác, mỗi thành phố một lần rồi quay về thành phố xuất phát. Giả thiết biết được chi phí đi từ thành phố i đến thành phố j là c[i,j]. Hãy tìm một hành trình cho người bán hàng sao cho tổng chi phí theo hành trình này là thấp nhất.

Thuật giải GTS1 (Greedy Traveling Saleman)

Input: số thành phố là n, đỉnh xuất phát u và ma trận chi phí c

Output: tour (thứ tự các thành phố đi qua),

cost – chí phí ứng với tour tìm được

```
v=u;
tour={u};
cost=0;
for i=1 to n
{       đặt w là thành phố kề sau thành phố v.
        tour=tour + {w};
        cost=cost+c[v,w]
        v=w;
}
tour=tour + {u};
cost=cost+c[v,u]
```

Ví dụ 1.1:

Cho đồ thị có ma trận chi phí như sau:

∞	20	42	31	6	24
10	∞	17	6	35	18
25	5	∞	27	14	9
12	9	24	∞	30	12
14	7	21	15	∞	38
40	15	16	5	20	∞

Sử dụng giải thuật GTS1 để tìm hành trình bắt đầu tại các đỉnh v_1=1; v_2=3; v_3=4; v_4=5

Hướng dẫn giải:

GTS1(v_1) $= 1 \rightarrow 5 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 1$

Cost(v_1) $= 6 + 7 + 6 + 12 + 16 + 25 = 72$.

Tương tự tính được:

GTS1(v_2) $=3 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 3$

Cost (v_2) $=5 + 6 + 12 + 6 + 38 + 16 = 83$.

GTS1(v_3) $=4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 5 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 4$

Cost (v_3) $=9 + 10 + 6 + 21 + 9 + 5 = 60$.

GTS1(v_4) $=5 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 5$

Cost (v_4) =7 + 6 + 12 + 24 +16 + 14 = 79.

Thuật giải GTS2 (Greedy Traveling Saleman)

Input n, c, p,v_i (i = 1..p)// v_i là các thành phố cho trước hoặc cũng có thể được chọn ngẫu nhiên trong tập 1..p

Output: besttour, bestcost

```
    bestcost=0
    besttour={}
    for i=1 to p
    {       GTS1(vk); // suy ra được tour(vk) và cost(vk)
            If cost(vk)<bestcost
                    {       bestcost=cost(vk)
                            besttour=tour(vk)
                    }
}
```

Ví dụ 1.2.

Cho đồ thị có ma trận chi phí như sau:

∞	20	42	31	6	24
10	∞	17	6	35	18
25	5	∞	27	14	9
12	9	24	∞	30	12
14	7	21	15	∞	38
40	15	16	5	20	∞

Sử dụng giải thuật GTS2 để tìm hành trình tốt nhất với p=4 (v1=2; v2=3; v3=5; v4=6)

Hướng dẫn giải:

Áp dụng giải thuật GTS1 như trên để tính

GTS1(v_1) = $2 \to 4 \to 1 \to 5 \to 3 \to 6 \to 2$

Cost(v_1) =.6+12+6+21+9+15=69

GTS1(v_2) =$3 \to 2 \to 4 \to 1 \to 5 \to 6 \to 3$

Cost (v_2) =5 + 6 + 12 + 6 +38 + 16 = 83.

GTS1(v3) =$5 \to 2 \to 4 \to 1 \to 6 \to 3 \to 5$

Cost (v_3) =7 + 6 + 12 + 24 +16 + 14 = 79.

GTS1(v4) =$6 \to 4 \to 2 \to 1 \to 5 \to 3 \to 6$

Cost (v_4) =5 + 9 + 10 + 6 +21 + 9 = 60.

Kết luận: Hành trình tốt nhất có chi phí là 60 với chi tiết tour như sau:

$6 \to 4 \to 2 \to 1 \to 5 \to 3 \to 6$

NGUYÊN LÝ THỨ TỰ

Thực hiện hành động dựa trên một cấu trúc thứ tự hợp lý của không gian cần khảo sát để nhanh chóng tìm được lời giải tốt. Nguyên lý này được sử dụng nhiều trong việc giải quyết các bài toán lập lịch.

Sau đây là một bài toán điển hình cho nguyên lý thứ tự

Ví dụ

Giả sử có m máy như nhau được ký hiệu từ $P_1,\ldots,P_m$. Có n công việc $J_1,\ldots,J_n$ cần được thực hiện. Các công việc có thể được thực hiện đồng thời và bất kỳ công việc nào cũng có thể chạy trên một máy nào đó. Mỗi lần máy được cho thực hiện một công việc nó sẽ làm cho tới khi hoàn chỉnh. Công việc J_i có thời gian thực hiện là T_i

Mục đích của chúng ta là tổ chức cách phân công các công việc được hoàn thành trong thời gian sớm nhất.

<u>THUẬT GIẢI 1:</u>

Lập một thứ tự L các công việc cần được thực hiện

Lặp lại các công việc sau cho đến khi nào các công việc đều được phân công:

Nếu có máy nào rãnh thì nạp công việc kế tiếp trong danh sách L vào (nếu có 2 hay nhiều máy cùng rãnh tại một thời điểm thì máy với chỉ số thấp sẽ được phân cho công việc).

Giả sử có 3 máy P1,P2,P3 và 6 công việc J1,J2,J3,J4,J5 J6 Với

Ti=(2,5,8,1,5,1)

L= (J2,J5,J1,J4,J6,J3)

Thì phân công theo phương án này sẽ không tối ưu (thời gian hoàn thành các công việc là 12)

<u>THUẬT GIẢI 2:</u>

Ta hãy quan tâm đến một heuristic đơn giản như sau:

L* là phương án mà các công việc được sắp theo thứ tự thời gian giảm dần. Ap dụng như thuật giải 1 và lúc này thời gian hoàn thành là 8.

Tuy nhiên heuristic này không chắc đã có một phương án tối ưu.

Ví dụ:

Cho 2 máy P1,P2 và 5 công việc J1,J2,j3,j4,j5. thời gian thực hiện các công việc là 3,2,2,3,2. Thì cách phân công công việc là:

P1: 3 2 2

P2: 3 2

Thời gian hoàn thành là 7. Trong khi thời gian hoàn thành tối ưu là 6:

3 3

2 2 2

BÀI TOÁN GIA CÔNG TRÊN HAI MÁY VÀ THUẬT TOÁN JOHNSON

Có n chi tiết máy D1, D2,..., Dn cần phải được lần lượt gia công trên 2 máy A, B. Thời gian gia công chi tiết D_i trên máy A là a_i, trên máy B là b_i (i =1, 2,..., n). Hãy tìm lịch (trình tự gia công) các chi tiết trên hai máy sao cho việc hoàn thành gia công tất cả các chi tiết là sớm nhất có thể được. Giả thiết rằng, trình tự gia công các chi tiết trên hai máy là như nhau và các chi tiết được làm trên máy A rồi đến máy B.

Một thuật toán hết sức nổi tiếng để giải bài toán trên đó là thuật toán Johnson. Thuật toán gồm các bước như sau:

+ Chia các chi tiết thành 2 nhóm: Nhóm N_1 gồm các chi tiết D_i thoả mãn $a_i < b_i$ và nhóm N_2 gồm các chi tiết D_i thoả mãn $a_i > b_i$. Các chi tiết D_i thoả mãn $a_i = b_i$ xếp vào nhóm nào cũng được.

+ Sắp xếp các chi tiết trong N_1 theo chiều tăng của các a_i và sắp xếp các chi tiết trong N_2 theo chiều giảm của các b_i.

+ Nối N_2 vào đuôi N_1. Dãy thu được (đọc từ trái sang phải) sẽ là lịch gia công tối ưu.

Bài tập

BT1-1.a. Cho đồ thị có ma trận chi phí như sau:

∞	28	36	34	10	29
16	∞	20	11	37	23
17	9	∞	32	18	13
16	13	28	∞	35	19
18	14	25	19	∞	49
40	19	20	11	91	∞

Sử dụng giải thuật GTS2 để tìm hành trình tốt nhất với p=4 (v1=2; v2=3; v3=5; v4=6)

b.Cho đồ thị có ma trận chi phí như sau:

∞	19	27	25	1	20
7	∞	11	2	28	14
8	4	∞	23	9	4

Vấn đề 2

Thuật giải tô màu

2.1.Bài toán tô màu

Cho n thành phố, hãy tô màu các thành phố này sao cho không có bất kỳ hai thành phố nào kề nhau được tô cùng một màu và số màu được tô là ít nhất có thể.

Dữ liệu vào được lưu trên một trận vuông c[i,j]. Nếu c[i,j]=1 thì hai thành phố i,j là kề nhau, c[i,j]=0 thì hai thành phố i,j không kề nhau.

2.2.Thuật giải tô màu tham lam(Greedy)

Dùng màu thứ nhất tô cho tất cả các đỉnh của đồ thị mà có thể tô được, sau đó dùng màu thứ hai tô tất cả các đỉnh của đồ thị còn lại có thể tô được và cứ như thế cho đến khi tô hết tất cả các đỉnh của đồ thị.

Lược đồ của thuật giải này như sau:

```
m=1;
số đỉnh đã được tô = 0;
mọi đỉnh đều chưa được tô
do
{       for i=1 to n
        if  (đỉnh i là chưa xét và có thể tô được bằng màu m)
                {       tô đỉnh i bằng màu m, đỉnh i trở thành đỉnh đã xét.
                        tăng số đỉnh đã được tô lên 1 đơn vị
                }
        m++
}
while (số đỉnh đã được tô<n)
```

Ví dụ: Phương án đặt sách lên kệ sách

Tại một cửa hàng sách, mới nhập về 12 quyển sách thuộc các loại sau:

Truyện cười: A, C, D, G.

Âm nhạc: B, H, K.

Lịch sử: E, J, L.

Khoa học: F, I.

Hãy sắp xếp những quyển sách này vào kệ sao cho số kệ sử dụng là ít nhất mà tuân theo các yêu cầu sau:

-Các quyển sách cùng loại không được để chung một kệ.

-Quyển A không được để chung với sách khoa học.

-Quyển L không được để chung với sách âm nhạc.

Giải:

Bước 1: Lập ma trận kề

	A	C	D	G	B	H	K	E	J	L	F	I
A	0	1	1	1							1	1
C	1	0	1	1								
D	1	1	0	1								
G	1	1	1	0								
B					0	1	1			1		
H					1	0	1			1		
K					1	1	0			1		
E								0	1	1		
J								1	0	1		
L					1	1	1	1	1	0		
F	1										0	1
I	1										1	0

Bước 2: Tô màu theo nguyên lý tham lam

Đỉnh	A	C	D	G	B	H	K	E	J	L	F	I
màu 1	1				1			1				
màu 2		2				2			2		2	
màu 3			3				3					3
màu 4				4						4		

Bước 3: Kết luận 12 quyển sách trên được xếp vào 4 kệ

Kệ 1: Gồm các quyển sách: A, B, E

Kệ 2: Gồm các quyển sách: C, H, J, F

Kệ 3: Gồm các quyển sách: D, K. I

Kệ 4: Gồm các quyển sách: G, L

2.3.Nguyên lý sắp xếp theo thứ tự kết hợp thuật giải tô màu tham lam

Bước 1:Sắp xếp các đỉnh theo bậc giảm dần.

Bước 2:Dùng màu thứ nhất tô cho đỉnh có bậc cao nhất và các đỉnh khác có thể tô còn lại.

Bước 3:Dùng màu thứ hai tô cho đỉnh có bậc cao thứ nhất (còn lại) và các đỉnh khác có thể tô còn lại

Bước 4:Và cứ như thế… cho đến khi tất cả các đỉnh được tô màu hết

Giải lại ví dụ Phương án đặt sách lên kệ sách

Bước 1: Lập ma trận kề

	A	C	D	G	B	H	K	E	J	L	F	I
A	0	1	1	1							1	1
C	1	0	1	1								
D	1	1	0	1								
G	1	1	1	0								
B					0	1	1			1		
H					1	0	1			1		
K					1	1	0			1		
E								0	1	1		
J								1	0	1		
L					1	1	1	1	1	0		
F											0	1
I											1	0

Bước 2: Tính bậc của từng đỉnh

Đỉnh	A	C	D	G	B	H	K	E	J	L	F	I
Bậc	5	3	3	3	3	3	3	2	2	5	2	2

Bước 3: Tô màu theo nguyên lý tham lam

Đỉnh	**A**	**C**	**D**	**G**	**B**	**H**	**K**	**E**	**J**	**L**	**F**	**I**
màu 1	1	~~1~~	~~1~~	~~1~~	1	~~1~~	~~1~~	1	~~1~~	~~1~~	~~1~~	~~1~~
màu 2	1	2	~~2~~	~~2~~	1	2	~~2~~	1	2	~~2~~	2	~~2~~
màu 3	1	2	3	~~3~~	1	2	3	1	2	~~3~~	2	3

màu 4	1	2	3	4	1	2	3	1	2	4	2	3

(Có thể thay – i bằng cách gạch một đường chéo qua i - ý nói ngăn cấm tô màu i)

Bước 4: Kết luận 12 quyển sách trên được xếp vào 4 kệ

Kệ 1: Gồm các quyển sách: A, B, E

Kệ 2: Gồm các quyển sách: C, H, J, F

Kệ 3: Gồm các quyển sách: D, K. I

Kệ 4: Gồm các quyển sách: G, L

2.4.Thuật toán tô màu tối ưu

Lược đồ của thuật giải này như sau:

Tính bậc của tất cả các đỉnh

while (còn đỉnh có bậc lớn hơn 0)

{

-Tìm đỉnh(chưa được tô) có bậc lớn nhất. Chẳng hạn đó là đỉnh i_0.

-Tìm màu để tô đỉnh i_0 là màu nhỏ nhất trong danh sách các màu còn lại có thể tô cho đỉnh i_0. Chẳng hạn đó là màu j.

-Ngăn cấm việc tô màu j cho các đỉnh kề với đỉnh i_0.

-Tô màu đỉnh i_0 là j.

-Gán bậc của đỉnh được tô bằng 0, các đỉnh kề với đỉnh được tô có bậc giảm đi 1 đơn vị.

}

Sau khi kết thúc vòng lặp trên có thể còn đỉnh chưa được tô nhưng tất cả các đỉnh lúc này đều đã có bậc bằng 0 – nghĩa là không thể hạ bậc được nữa. Khi đó màu của các đỉnh chưa được tô chính là màu nhỏ nhất hợp lệ trong danh sách màu của đỉnh đó.

Giải lại ví dụ Phương án đặt sách lên kệ sách

Bước 1: Lập ma trận kề

	A	C	D	G	B	H	K	E	J	L	F	I
A	0	1	1	1							1	1

C	1	0	1	1								
D	1	1	0	1								
G	1	1	1	0								
B					0	1	1			1		
H					1	0	1			1		
K					1	1	0			1		
E								0	1	1		
J								1	0	1		
L					1	1	1	1	1	0		
F											0	1
I											1	0

Bước 2: Tính bậc của từng đỉnh

Đỉnh	A	C	D	G	B	H	K	E	J	L	F	I
Bậc	5	3	3	3	3	3	3	2	2	5	2	2

Bước 3: Tô màu bằng thuật toán tô màu tối ưu

Tô các đỉnh còn lại	1	2	3	4	2	3	4	2	3	1	2	3
Tô màu lần 8											2	-2
Tô màu lần 7								2	-2			
Tô màu lần 6						3	-3					
Tô màu lần 5			3	-3								
Tô màu lần 4					2	-2	-2					
Tô màu lần 3		2	-2	-2								
Tô màu lần 2					-1	-1	-1	-1	-1	1		
Tô màu lần 1	1	-1	-1	-1							-1	-1
Đỉnh	A	C	D	G	B	H	K	E	J	L	F	I
Bậc	5	3	3	3	3	3	3	2	2	5	2	2
Hạ bậc lần 1	0	2	2	2	3	3	3	2	2	5	1	1
Hạ bậc lần 2	0	2	2	2	2	2	2	1	1	0	1	1

Hạ bậc lần 3	0	0	1	1	2	2	2	1	1	0	1	1
Hạ bậc lần 4	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1
Hạ bậc lần 5	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1
Hạ bậc lần 6	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1
Hạ bậc lần 7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
Hạ bậc lần 8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Bước 4: Kết luận: 12 quyển sách trên được xếp vào bốn kệ như sau.

Kệ 1 gồm các quyển: A, L

Kệ 2 gồm các quyển: C, B, E, F

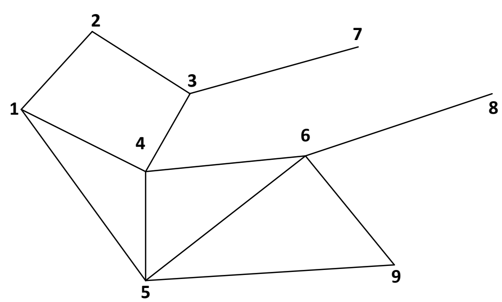
Kệ 3 gồm các quyển: D, H, J, I

Kệ 4 gồm các quyển: G, K

Bài tập

BT2-1.Tô màu cho các tỉnh của một bản đồ

Cho bản đồ các tỉnh miền Bắc Việt Nam như sau. Hãy tô màu cho các tỉnh này sao cho hai tỉnh giáp ranh không được tô cùng một màu.



Quy ước:

1: Sơn La

2: Lai Châu

3:Lào Cai

4:Yên Bái

5:Vĩnh Phúc

6:Tuyên Quang

Vấn đề 3

Tìm kiếm ưu tiên tối ưu

(thuật giải A^{KT})

Tìm kiếm ưu tiên tối ưu có nhiều phiên bản, trong mục này chúng ta chỉ đề cập đến thuật giải A^{KT}.

3.1.Trình bày thuật giải

Bước 1: Khởi động

- Mọi đỉnh n là hàm f, g, h đều ẩn.
- Mở đỉnh đầu tiên S_o. Gán $g(S_o)=0$.
- Sử dụng tri thức bổ sung ước tính $h(S_o)$.
- Tính $f(S_o) = g(S_o) + h(S_o)$.

Bước 2: Lượng giá

- Chọn 1 đỉnh mở ứng với hàm f là min và gọi là đỉnh N.
- Nếu N là đích → dừng (đường đi từ đỉnh ban đầu đến đỉnh N là ngắn nhất và bằng g(N)).
- Nếu không tồn tại N thì cây biểu diễn vấn đề không có đường đi tới mục tiêu → dừng (bài toán không lời giải).
- Nếu tồn tại nhiều hơn 1 đỉnh N có cùng hàm f_{min} thì phải kiểm tra xem trong số đó có đỉnh nào là đích không.
  + Nếu có → dừng.
  + Nếu không → chọn ngẫu nhiên 1 trong các đỉnh đó và gọi đó là đỉnh N.

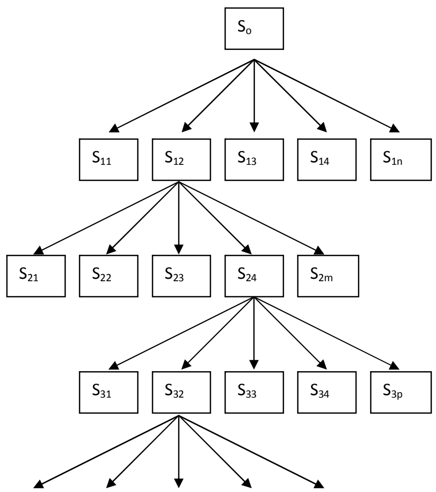
Bước 3: Phát triển

- Đóng đỉnh N và mở mọi đỉnh sau N.
- Mọi đỉnh S sau N, tính.
  $g(S) = g(N) + g(N – S)$.
- Dùng tri thức bổ sung để ước tính hàm h(S).
- Tính $f(S) = g(S) + h(S)$.

Bước 4: Quay lui

- Quay lại bước 2.

Hình ảnh của thuật giải A^{KT}



3.2. Sử dụng thuật giải A^{KT} giải bài toán TACI

Bài toán TACI

Có n^2-1 số mang các giá trị từ 1 tới n^2-1 được sắp xếp vào một lưới các ô vuông kích thước n x n. Mỗi số đó được gọi là một quân cờ và lưới ô đó được gọi là bàn cờ. Có một vị trí của bàn cờ bỏ trống. Mỗi lần di chuyển quân, người chơi được phép chuyển một quân ở vị trí ô tiếp giáp cạnh với ô trống vào ô trống.

Yêu cầu: Từ một trạng thái ban đầu (a) (sự sắp xếp ban đầu của các quân trên bàn cờ), hãy thực hiện các nước đi hợp lệ để thu được trạng thái kết thúc (b) (trạng thái đích cần đạt được).

Ví dụ:

Bắt đầu với trạng thái (a), cho biết cách thay đổi (đẩy ô số) ít nhất để được trạng thái (b). Sử dụng khoảng cách Mahattan làm hàm heuristic. Định nghĩa khoảng cách Mahattan là tổng khoảng cách theo chiều ngang và chiều dọc của các ô số so với trạng thái đích.

1		7
5	4	8
2	3	6

(a)

→

1	4	7
2	5	8
3	6	

(b)

(có thể quy ước về thứ tự đẩy theo các hướng như sau: trái- phải- trên –dưới)

Bước 1: Đẩy lần 1

1		7
5	4	8
2	3	6

(S_o)

$g(S_o) = 0$
$h(S_o) = 5$
$f(S_o) = 5$

	1	7
5	4	8
2	3	6

S_{11}

$g(S_{11}) = 1$
$h(S_{11}) = 6$
$f(S_{11}) = 7$

1	7	
5	4	8
2	3	6

S_{12}

$g(S_{12}) = 1$
$h(S_{12}) = 6$
$f(S_{12}) = 7$

1	4	7
5		8
2	3	6

S_{13}

$g(S_{13}) = 1$
$h(S_{13}) = 4$
$f(S_{13}) = 5$

Chọn đỉnh (S_{13}) là đỉnh mở vì đỉnh này có f là nhỏ nhất.

Bước 2: Đẩy lần 2

1	4	7
5		8
2	3	6

(S_{13})

$g(S_{13}) = 1$
$h(S_{13}) = 4$
$f(S_{13}) = 5$

1	4	7
	5	8
2	3	6

S_{21}

$g(S_{21}) = 2$
$h(S_{21}) = 3$
$f(S_{21}) = 5$

1	4	7
5	8	
2	3	6

S_{22}

$g(S_{22}) = 2$
$h(S_{22}) = 5$
$f(S_{22}) = 7$

1	4	7
5	3	8
2		6

S_{23}

$g(S_{23}) = 2$
$h(S_{23}) = 5$
$f(S_{23}) = 7$

Chọn đỉnh (S_{21}) là đỉnh mở vì đỉnh này có f là nhỏ nhất.

Bước 3: Đẩy lần 3

1	4	7
	5	8
2	3	6

(S_{21})

$g(S_{21}) = 2$
$h(S_{21}) = 3$
$f(S_{21}) = 5$

	4	7
1	5	8
2	3	6

S_{31}

$g(S_{31}) = 3$
$h(S_{31}) = 4$
$f(S_{31}) = 7$

1	4	7
2	5	8
	3	6

S_{32}

$g(S_{32}) = 3$
$h(S_{32}) = 2$
$f(S_{32}) = 5$

Chọn đỉnh (S_{32}) là đỉnh mở vì đỉnh này có f là nhỏ nhất.

Bước 4: Đẩy lần 4

1	4	7
	5	8
2	3	6

(S_{32})

$g(S_{32}) = 3$
$h(S_{32}) = 2$
$f(S_{32}) = 5$

1	4	7
2	5	8
	3	6

S_{41}

$g(S_{41}) = 4$
$h(S_{41}) = 1$
$f(S_{41}) = 5$

Chọn đỉnh (S_{41}) là đỉnh mở

Bước 5: Đẩy lần 5

1	4	7
2	5	8
3		6

(S_{41})

$g(S_{41}) = 4$
$h(S_{41}) = 1$
$f(S_{41}) = 5$

1	4	7
2	5	8
3	6	

S_{51}

$g(S_{51}) = 5$
$h(S_{51}) = 0$
$f(S_{51}) = 5$

1	4	7
2		8
3	5	6

S_{52}

$g(S_{52}) = 5$
$h(S_{52}) = 2$
$f(S_{52}) = 7$

Chọn đỉnh (S_{51}) là đỉnh mở vì đỉnh này có f là nhỏ nhất.

Bước 6: Kết luận với hàm heuristic đã cho, ta tìm được đường đi tới trạng thái đích như sau: $(S_o) \rightarrow (S_{13}) \rightarrow (S_{21}) \rightarrow (S_{32}) \rightarrow (S_{41}) \rightarrow (S_{51})$

Ví dụ : Bài toán đặt quân hậu

Mô tả bài toán:

Cho bàn cờ vua có kích thước n x n. Hãy đặt tám quân hậu vào trong bàn cờ sao cho không có quân hậu nào ăn quân hậu nào.

Heuristic đề nghị cho bài toán tám quân hậu:

Heuristic đề nghị: lần lượt đặt các quân hậu vào các dòng trong bàn cờ và chọn ô đặt quân hậu tại vị trí mà khi đặt quân hậu tại đó số ô khống chế thêm là ít nhất.

Giải bài toán 5 quân hậu

Cho bàn cờ vua kích thước 5x5. Hãy đặt tám quân hậu vào trong bàn cờ sao cho không có quân hậu nào ăn quân hậu nào.

	1	2	3	4	5
1					
2					
3					
4					
5					

Giải

Bước 1: Đặt quân hậu tại dòng 1

Lượng giá:

	1	2	3	4	5
1	12	12	12	12	12
2					
3					
4					
5					

Bước 2: Đặt quân hậu tại dòng 2

Lượng giá

	1	2	3	4	5
1	1	x	x	x	x
2	x	x	7	6	7
3	x		x		
4	x			x	
5	x				x

Chọn ô (2,4) làm ô đặt hậu

Bước 3: Đặt quân hậu tại dòng 3

Lượng giá

	1	2	3	4	5
1	1	x	x	x	x
2	x	x	x	2	x
3	x	2	x	x	x
4	x	x		x	
5	x			x	x

Chọn ô (3,2) làm ô đặt hậu

Bước 4: Đặt quân hậu tại dòng 4

Lượng giá

	1	2	3	4	5
1	1	x	x	x	x
2	x	x	x	2	x
3	x	3	x	x	x
4	x	x	x	x	0
5	x	x		x	x

Chọn ô (4,5) làm ô đặt hậu

Bước 5: Đặt quân hậu tại dòng 5

Lượng giá

	1	2	3	4	5
1	1	x	x	x	x
2	x	x	x	2	x
3	x	3	x	x	x
4	x	x	x	x	4
5	x	x	0	x	x

Chọn ô (5,3) làm ô đặt hậu

Bước 6:Kết luận:

Với Heuristic đã cho ta tìm được phương án đặt hậu như hình vẽ sau:

	1	2	3	4	5
1	1	x	x	x	x
2	x	x	x	2	x
3	x	3	x	x	x
4	x	x	x	x	4
5	x	x	5	x	x

Vấn đề 4

Thuật toán Vương Hạo và thuật toán Robinsơn

4.1.Thuật toán Vương Hạo

Bước 1:Phát biểu lại giả thiết và kết luận của bài toán dưới dạng chuẩn sau:

$$GT_1, GT_2, \ldots, GT_{n-1}, GT_n \rightarrow KL_1, KL_2, \ldots, KL_{m-1}, KL_m$$

Trong đó các GT_i và KL_j được xây dựng từ các biến mệnh đề và các phép toán $\wedge, \vee, \neg$.

Bước 2:Chuyển vế các giá trị GT_i, KL_j có dạng phủ định.

Bước 3:Thay phép toán $\wedge$ ở GT_i và phép toán $\vee$ ở KL_j bằng dấu ",".

Bước 4:Nếu dòng hiện hành có một trong hai dạng sau:

Dạng 1:

$GT_1, GT_2, \ldots, a \vee b, \ldots, GT_{n-1}, GT_n \rightarrow KL_1, KL_2, \ldots, KL_{m-1}, KL_m$

Thì thay bằng hai dòng:

$$\begin{cases} GT_1, GT_2, \ldots, a, \ldots, GT_{n-1}, GT_n \rightarrow KL_1, KL_2, \ldots, KL_{m-1}, KL_m \\ GT_1, GT_2, \ldots, b, \ldots, GT_{n-1}, GT_n \rightarrow KL_1, KL_2, \ldots, KL_{m-1}, KL_m \end{cases}$$

Dạng 2:

$GT_1, GT_2, \ldots, GT_{n-1}, GT_n \rightarrow KL_1, KL_2, \ldots, a \wedge b, \ldots, KL_{m-1}, KL_m$

Thì thay bằng hai dòng:

$$\begin{cases} GT_1, GT_2, \ldots, GT_{n-1}, GT_n \rightarrow KL_1, KL_2, \ldots, a, \ldots, KL_{m-1}, KL_m \\ GT_1, GT_2, \ldots, GT_{n-1}, GT_n \rightarrow KL_1, KL_2, \ldots, b, \ldots, KL_{m-1}, KL_m \end{cases}$$

Bước 5: Một dòng được chứng minh nếu tồn tại chung một mệnh đề ở cả hai vế.

Bước 6:

6.a.Một vấn đề được giải quyết trọn vẹn nếu mọi dòng dẫn xuất biểu diễn ở dạng chuẩn được chứng minh.

6.b.Nếu một dòng không còn dấu liên kết $\wedge$, $\vee$ và cả hai vế không có chung mệnh đề nào thì dòng đó không được chứng minh.

Lưu ý về các công thức cơ bản:

$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \neg q$

$\neg (p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

$\neg (p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

4.2.Thuật toán Robinson

Bước 1: Phát biểu lại giả thiết và kết luận bài toán dưới dạng chuẩn sau.

$GT_1, GT_2, \ldots, GT_n \rightarrow KL_1, KL_2, \ldots, KL_m$

Trong đó các GTi và KLi được xây dựng nhờ các biến mệnh đề và các phép toán $\vee, \wedge, \neg$

Bước 2: Biến đổi dòng trên thành danh sách các mệnh đề

$\{GT_1, GT_2, \ldots, GT_n, \neg KL_1, \neg KL_2, \ldots, \neg KL_m\}$

Bước 3: Nếu trong danh sách các mệnh đề ở bước 2 có 2 mệnh đề đối ngẫu nhau (dạng $\{a, \neg a\}$) thì vấn đề được giải quyết xong, còn không thì chuyển sang bước 4.

Bước 4: Xây dựng 1 mệnh đề mới bằng cách tuyển 1 cặp mệnh đề trong danh sách các mệnh đề ở bước 2, nếu mệnh đề mới có các biến mệnh đề đối ngẫu nhau thì những biến đổi đó được loại bỏ.

Bước 5: Bổ dung mệnh đề mới vào danh sách và loại bỏ 2 mệnh đề cũ vừa tạo thành mệnh đề mới ra khỏi danh sách.

Bước 6: Nếu không xây dựng thêm mệnh đề mới nào và trong danh sách các mệnh đề không có 2 mệnh đề đối ngẫu nhau thì vấn đề phát biểu ở dạng chuẩn bước 1 là sai

Bài tập

BT4-1.a. Chứng minh rằng $p \rightarrow q, q \rightarrow r$ suy ra $p \rightarrow r$

b.Chứng minh rằng $(a \wedge b) \rightarrow c, (b \wedge c) \rightarrow d, \neg d$ suy ra $a \rightarrow b$

c.Chứng minh rằng $(a \wedge b) \rightarrow c, (b \wedge c) \rightarrow d, \neg d$ suy ra $a \rightarrow \neg b$

BT4-2. Chứng minh rằng $p \rightarrow q, q \rightarrow r, r \rightarrow t, p$ suy ra $t \rightarrow u$

BT4-3. Chứng minh rằng $p \rightarrow q, q \rightarrow r, r \rightarrow t, p$ suy ra $u \rightarrow t$

BT4-4. Chứng minh rằng $p \rightarrow q, q \rightarrow r, r \rightarrow s, p$ suy ra $p \wedge s$

BT4-5. Chứng minh rằng $(a \wedge b) \rightarrow c, (b \wedge c) \rightarrow d, a \wedge b$ suy ra d

BT4-6. Chứng minh rằng $(a \wedge b) \rightarrow c, (b \wedge c) \rightarrow d, a, b$ suy ra d

BT4-7. Chứng minh rằng $(a \rightarrow b) \wedge c \equiv (b \wedge c) \vee (c \wedge \neg a)$

BT4-8. Chứng minh rằng Cho tập giả thiết $\{a \rightarrow b \wedge c, c \rightarrow e \vee f, b \rightarrow \neg e\}$

Hãy biến đổi tập giả thiết về dạng chuẩn và chứng minh nếu có thêm điều kiện a thì có thể suy ra f (nêu rõ phương pháp được sử dụng để chứng minh).

BT4-9. Chứng minh rằng

a. $(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r) \wedge (\neg r \vee s) \wedge (\neg u \vee \neg s) \rightarrow \neg p \vee \neg u$

b. $\neg q \wedge (\neg p \vee q) \rightarrow \neg(p \wedge s)$

BT4-10.Chứng minh rằng

a. Cho $\{(a \wedge b) \rightarrow c, (b \wedge c) \rightarrow d, (a \wedge b)\}$. Hỏi d ?

b.Cho $\{a \rightarrow b \vee d, d \rightarrow e \wedge f, e \wedge a \rightarrow \neg b\}$. Hỏi $a \rightarrow d$?

c.Cho $\{(a \wedge b) \rightarrow c, (b \wedge c) \rightarrow d, \neg d\}$. Hỏi rằng $a \rightarrow b$?